Die Anwendung der Ausgleichungsrechnung und Variationsstatistik auf Rindermessungen mit besonderer Berücksichtigung des Glatzer Gebirgsviehes.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

vorgelegt von

Wilhelm Zorn

Assistent a. d. Kgl. technischen Hochschule zu München.

Dienstag, den 4. Juli 1911, mittags 12 Uhr

in der Aula Leopoldina:

Vortrag:

Die genossenschaftliche Viehverwertung und ihre Bedeutung für die landwirtschaftliche Tierproduktion

und

Promotion.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann.
1911.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau.

Referent: Professor Dr. **Holdefleiss.**

Die mündliche Prüfung hat stattgefunden am 31. Mai 1911.

Seinem hochverehrten Lehrer und Chef,

dem Herrn

Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Fr. Holdefleiss

Direktor des Instituts für Tierproduktionslehre der Universität Breslau

als Zeichen grösster Verehrung und Dankbarkeit

ergebenst gewidmet

der Verfasser.

Auf Anregung meines Lehrers, Professor Dr. Holdefleiß, hatte ich mir vorgenommen, in vorliegender Arbeit das Gebirgsvieh der Grafschaft Glatz in bezug auf Rassezugehörigkeit, Abstammung und Zuchtwert zu untersuchen und bei der Deutung der Messungsergebnisse die Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie zu berücksichtigen. Der Mangel an Vorarbeiten in letzterer Hinsicht veranlaßte mich, über die Anwendbarkeit der Gaußschen Fehlertheorie in bezug auf Rindermessungen eingehende Studien anzustellen, die in ihrem Umfang eine besondere Arbeit entstehen ließen. — Die nun vorliegende Abhandlung befaßt sich nur mit der Anwendung der Gaußschen Fehlertheorie, erweitert auf Variationsstatistik und Kollektivmaßlehre in bezug auf Rindermessungen, wobei allerdings das Glatzer Gebirgsvieh besondere Berücksichtigung findet. Eine spezielle Beschreibung des Glatzer Gebirgsviehs wird dieser Arbeit unter Bezugnahme auf die hier gewonnenen Erkenntnisse in Kürze folgen.

Eine der vornehmsten Aufgaben der neuzeitlichen Tierzuchtlehre ist der Ausbau der wissenschaftlichen Grundlagen, die geeignet sind, der Praxis eine breitere, sichere Unterlage zu geben, und damit der Wissenschaft die Rolle der Führerin zu überweisen, die sie in unserem Vaterlande nicht in dem Maße besitzt, wie in England und Nordamerika, wo zurzeit durch die Schule der Biometriker bezw. durch die reichen Mittel der Carnegiestiftungen große Fortschritte erstrebt werden. Ich erinnere nur an die Namen Pearson, Galton, Duncker, Davenport, den Belgier Quetelet und viele andere, die die Variationsstatistik zum Teil ausarbeiteten, zum Teil in weitestem Maße zur Deutung ihrer Forschungsresultate anwandten. Wurde damit der Weg exakter Forschung in der Züchtungskunde dort angebahnt und als der allein richtige erkannt, so hat nichtsdestoweniger diese Überzeugung bisher im allgemeinen nur wenig Anklang und Nachahmung gefunden. — Auch bei uns gelten die empirischen Anschauungen gerade in der allgemeinen Tierzucht immer noch höher, als exakte Forschung, das letztere nicht zum wenigsten deshalb, weil die Wissenschaft in vielen Fragen, wie Vererbung, Variabilität, Abstammungslehre und Rassenentwicklung weit hinter den Fortschritten auf den Gebieten

der Ernährungslehre, der Tierhaltung und -Pflege, der Gewinnung und Verwertung der tierischen Erzeugnisse, der Förderung durch öffentliche Maßnahmen zurückgeblieben ist. Es herrscht eine gewisse Scheu, ja nicht von der realen Basis abzuweichen, auf der die Praxis steht, und alles möchte vermieden werden, was der breiten Masse der Praxis unverständlich sein könnte. Gewiß, Praxis und Theorie müssen zusammenarbeiten, die Theorie braucht das Verständnis und die Mithilfe der Praxis, soll es ihr gelingen, den Schleier, der über manchen Gebieten der Tierzucht noch so dicht liegt, zu lüften und die vielfach noch so geheimnisvollen Naturgesetze dem menschlichen Geiste nutzbar zu machen.

Ebenso wie die Biologie von spekulativer Forschung zu exakt experimenteller am Beginn dieses Jahrhunderts übergegangen ist, wird auch die tierzüchterische Forschung von dem alten ausgetretenen Wege abweichen und sich einer wissenschaftlich exakten experimentellen Methode zuwenden müssen. Damit wird sie gezwungen sein, in mancher Hinsicht den realen Boden der Praxis zu verlassen und zu Untersuchungsmethoden zu greifen, die in ihrer Durchführung und rechnerischen Behandlung von den bisherigen einfachen abweichen. Lag in dieser Einfachheit zweifellos ein Vorteil, so muß doch zugegeben werden, daß es falsch wäre, nur deshalb logisch unanfechtbare und einer mathematischen Kritik standhaltende Methoden vor anderen einfachen, aber als fehlerhaft erkannten zurücksetzen zu wollen, weil sie umständlicher, schwieriger und der Praxis schwerer verständlich sind. Schließlich kommt es doch in letzter Linie auf die Richtigkeit der Ergebnisse und nicht auf deren einfache Berechnungsart an.

In der biologischen und Rassenforschung handelt es sich zumeist darum, entweder einzelne Individuen oder größere Klassen derselben zu vergleichen und aus diesen Vergleichen Schlüsse auf die Entwicklung und Vererbungsintensität gewisser meßbarer Merkmale zu ziehen, festzustellen, in welchem Grade und in welcher Weise diese Unterschiede vererbt werden, oder von den typischen Formen einer Klasse auf die Leistungen zu schließen. Gerade dieser letzte Punkt der Korrelation von Form und Leistung hat die neue Literatur mit mehreren Untersuchungen von Kronacher[1]), Bogdanow[2]), Kleberger[3]), Hittcher[4]), Schmidt[5]), Stegmann[6]), Koch[7]), Attinger[8]), Unger[9]), Gaude[10]) u. a. bereichert, ohne freilich trotz dieser vielseitig angestellten Untersuchungen gleichartige Resultate zu liefern. Es gehört nicht in den Rahmen dieser Ausführungen, auf die sich vielfach direkt widersprechenden und auch trotz oder vielmehr wegen der zu einfachen Berechnungsart zu den bisher allgemeinsten praktischen Erfahrungen vielfach im Gegensatz stehenden Resultate dieser Arbeiten einzugehen; ich führe diese Untersuchungen nur deshalb an, um mit v. Neergaard[11]) der Überzeugung Ausdruck zu geben, daß in bezug auf Rindermessungen „die bisherige Methode der Erhebungen und deren Bearbeitung zu Bemühungen führt, die mit dem Erfolg nicht in Einklang stehen".

---

[1]—[10]) S. Literaturangabe, S. 54.

[11]) Deutsche Landw. Tierzucht, Jahrg. 1909, S. 122.

Wer sich mit Messungen irgendwelcher Art beschäftigt, macht die Erfahrung, daß diese Messungen Fehlern ausgesetzt sind. Diese Fehler — Beobachtungsfehler, wie sie genannt werden — können wohl auf ein möglichst geringes Maß reduziert werden, sei es, daß die Beobachtung wiederholt, oder daß verschiedene in Korrelation stehende Größen gemessen und mit bekannten Beziehungen verglichen werden. Nie aber werden die Messungen völlig fehlerfrei werden, wenn es auch gelingt, die Fehler so zu vermindern, daß sie vernachlässigt werden können.

Dem scharfsinnigen Mathematiker Gauß verdanken wir um 1795 die Entdeckung eines Gesetzes, des nach ihm benannten Gaußschen Gesetzes, nach welchem diese Beobachtungsfehler einer bestimmten Kurve, der sogenannten Gaußschen Fehlerwahrscheinlichkeitskurve, folgen.[1]) Die Häufigkeit des Vorkommens eines Fehlers ist dabei eine Funktion seiner Größe, derart, daß kleine Fehler häufiger vorkommen, als große. Wie groß nun die Häufigkeit eines Fehlers für ein bestimmtes Größenintervall ist, läßt sich aus dem Verlauf der asymptotisch an den Koordinaten eines rechtwinkligen Koordinatensystems auslaufenden hyperbelartigen Kurve leicht ersehen. Mit Hilfe dieser Kurve und einer ihr entsprechenden, von Gauß berechneten Tabelle, der sogenannten Fehlerwahrscheinlichkeitstabelle, läßt sich der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Beobachtung sowie des Mittels aller einzelnen Beobachtungen, berechnen. —

Fehlerwahrscheinlichkeitstabelle.

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Differenz liegt zwischen 0,0 r und

0,2 r ist	0,1073	2,8 r ist	0,9410
0,4 „ „	0,2127	3,0 „ „	0,9570
0,6 „ „	0,3143	3,2 „ „	0,9691
0,8 „ „	0,4105	3,4 „ „	0,9782
1,0 „ „	0,5000	3,6 „ „	0,9848
1,2 „ „	0,5817	3,8 „ „	0,9896
1,4 „ „	0,6550	4,0 „ „	0,9930
1,6 „ „	0,7195	4,2 „ „	0,9954
1,8 „ „	0,7753	4,4 „ „	0,9970
2,0 „ „	0,8227	4,6 „ „	0,9981
2,2 „ „	0,8622	4,8 „ „	0,9988
2,4 „ „	0,8945	5,0 „ „	0,9993
2,6 „ „	0,9205		

Zur Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers (r) jeder einzelnen Beobachtung bildet man aus der Zahl der sämtlichen vorhandenen Beobachtungen das arithmetische Mittel (A) und berechnet r nach der Formel

$$r = 0{,}845 \frac{\pm [v]}{\sqrt{m\,(m-1)}}$$

wobei v die Abweichung jeder einzelnen Beobachtung vom arithmetischen Mittel (A) sämtlicher Beobachtungen, [v] die Summe dieser Abweichungen

[1]) Jordan, Vermessungskunde I.

von A, absolut genommen, ist. Unter m versteht man die Zahl der Beobachtungen, die zur Bildung des Mittels herangezogen ist.

Hat man auf diese Weise den wahrscheinlichen Fehler r jeder einzelnen Beobachtung berechnet, und will man wissen, wie häufig r oder ein vielfaches von r bei einer neuen Beobachtungsreihe auftreten kann, so multipliziert man die Zahl der Beobachtungen (m) mit der in der Fehlerwahrscheinlichkeitstabelle angegebenen Wahrscheinlichkeit. Vermittelst des wahrscheinlichen Fehlers läßt sich somit nicht nur ein Anhalt für den Fehler der augenblicklichen Beobachtung gewinnen, sondern er sagt uns auch in seiner Beziehung zur Gaußschen Tabelle, mit welcher Wahrscheinlichkeit und innerhalb welcher Grenzen die gefundenen Resultate bei einer gleichen Versuchsanordnung wiedergefunden werden. Um dies graphisch deutlich zu machen, trägt man die m (Zahl der Beobachtungen) in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Abszissen (in horizontaler Richtung), die r und ihr Vielfaches nach den Berechnungen aus der Fehlerwahrscheinlichkeitstabelle als Ordinaten (in vertikaler Richtung) auf und kann so die theoretische Fehlerwahrscheinlichkeitskurve konstruieren und mit der empirischen Kurve durch Auftragung der wirklich ermittelten Abweichungen im gleichen Maßsystem vergleichen. Sei die Summe aller Beobachtungen 10000, so entspricht nach der Fehlerwahrscheinlichkeitstabelle einem $m = 1073$ als Punkt auf der Abszisse die Wahrscheinlichkeit 0,2 r, so daß die Ordinate in diesem Punkt $= 0{,}2\ r$ groß gemacht wird; bei $m = 9988$ jedoch beträgt die Größe der Ordinate 4,8 r.

Neben dem wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Beobachtung kann man aber auch noch den wahrscheinlichen Fehler des Mittels aller einzelnen Beobachtungen (R) berechnen nach der Formel

$$R = \frac{r}{\sqrt{m}}$$

$$\text{oder da } r = \frac{0{,}845\,[v]}{\sqrt{m\,(m-1)}}$$

$$R = \frac{0{,}845\,[v]}{m\sqrt{m-1}}$$

Der mittlere, bezw. wahrscheinliche Fehler des Mittelwerts einzelner Beobachtungen verkleinert sich, wie aus der Formel hervorgeht, nicht proportional der Variantenzahl, sondern proportional der Quadratwurzel dieser Zahl $= \sqrt{m}$

für r =	10								
und m =	1	2	3	4	5	6	8	10	20
ist $\frac{r}{\sqrt{m}}$ =	10,0	7,1	5,8	5,0	4,5	4,1	3,5	3,2	2,2

Streng genommen besitzt nun die Gaußsche Fehlertheorie nur Gültigkeit für eine unendliche Zahl von Beobachtungen, welche theoretische Forderung natürlich unmöglich zu erfüllen ist. Mit der Anzahl der untersuchten Fälle bezw. mit der Anzahl der Beobachtungen wächst die Genauigkeit; doch ist zu beachten, daß die Anzahl der Bestimmungen nicht weiter als bis zu genügender Genauigkeit gesteigert werden darf, da eine übergroße

Zahl von Beobachtungen die Berechnung nur mühsamer, jedoch nur wenig genauer macht.

Die hier vorläufig in kurzen Zügen dargelegte Fehlertheorie, auf die in einzelnen Punkten später noch öfter zurückzukommen sein wird, wurde zuerst nur in der Astronomie, Geodäsie und Physik, später in der Anthropologie und Zoologie angewendet und erst in der neueren Zeit, namentlich von der englischen Schule der Biometriker, aber auch von Johannsen[1]), v. Tschermak[2]), de Vries[3]) u. a. in der Pflanzenzüchtung und Vererbungslehre, wenn auch in etwas erweiterter Form, zur Anwendung gebracht. In der landwirtschaftlichen Tierzucht hat die Gaußsche Fehlertheorie und die damit im Zusammenhang stehende Variationsstatistik bis jetzt wenig Eingang gefunden. Außer von Rodewald[4]), der zuerst eine bisher völlig praktische Frage in der landwirtschaftlichen Tierzucht vom kritisch-mathematischen Standpunkt aus betrachtet, und eine Formel für die Milchleistung aufstellt, scheint eine erste Anregung von v. Neergaard in der Gesellschaft für Züchtungskunde 1903 gegeben worden zu sein, indem er der Meinung Ausdruck verlieh, „daß die Zeit gekommen zu sein scheine, daß auch die Tierproduktionslehre und Züchtungskunde unter Zuhilfenahme der Gaußschen Fehlertheorie bei der Sammlung biologischer Beobachtungen Ordnung in ihre Zahlenreihen zu bringen versuche“.[5]) — In dieser Hinsicht sollen denn auch die folgenden Ausführungen einen solchen Versuch darstellen. Es soll versucht werden, festzustellen, ob die Fehlertheorie und Variationsstatistik ebenso wie in der landwirtschaftlichen Pflanzenzüchtung auch in der landwirtschaftlichen Tierzüchtung angewendet werden kann, d. h. ob eine derartige Berechnungsweise zur Erzielung genauerer Resultate und einwandfreier Deutung biologischer meßbarer Beobachtungen geeignet ist, bezw. allein imstande ist, richtige Resultate zu liefern. —

Die Gaußsche Fehlertheorie läßt sich, wie namentlich von Quetelet nachgewiesen, nicht nur auf subjektive Beobachtungen bezw. Messungen anwenden, die mit zufälligen Fehlern behaftet sind, sondern überhaupt auf zufällige Ereignisse in der Natur. So erhalten wir dieselbe Kurve, wenn die Abweichungen von meßbaren Merkmalen einer großen, streng genommen ∞ Zahl einzelner Individuen von dem Durchschnittswert eines Individuenkomplexes in ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingetragen werden, wie bei den subjektiven Beobachtungs- und Messungsfehlern. In dieser Hinsicht haben Quante[6]), Albrecht[7]), Rodewald[8]), Mitscherlich[9]) u. a. durch Vergleich von Messungen an Halmlängen, Ährenlängen, Kornlängen

---

[1]) Johannsen, Elemente der exakten Erblichkeitslehre.
[2]) Hugo de Vries, Mutationstheorie I u. II.
[3]) v. Tschermak-Fruwirth, Die Züchtung der landw. Kulturpflanzen.
[4]) Fühlings Landw. Zeitung, Bd. 58, Heft 8.
[5]) a. a. O., Jahrg. 1909, Landw. Tierzucht, S. 122.
[6]) Landw. Versuchsstationen, Bd. 74, Heft 1 u. 2.
[7]) Fühlings Landw. Zeitung, Bd. 57, Heft 17.
[8]) Landw. Versuchsstationen, Bd. 36 u. 37.
[9]) Landw. Jahrbücher 1903.

die Fehlerwahrscheinlichkeitsrechnung auf die Pflanzenzüchtung angewendet. — Befolgt so die Natur in den Abweichungen der einzelnen Individuen eines größeren Individuenkomplexes vom Durchschnitts- oder Normaltypus desselben das uns schon bekannte Gaußsche Gesetz, so muß doch auseinander gehalten werden, daß es sich bei der auf dem ursprünglichen Gaußschen Gesetz fußenden Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie, wie wir sie zu Beginn dieser Abhandlung kennen gelernt haben, um Abweichungen handelt, die durch mangelnde Genauigkeit der Meßinstumente oder mangelnde Schärfe unserer Sinne und zufällige äußere Störungen bei wiederholten Messungen eines einzelnen Gegenstandes entstanden sind. Die Abweichungen, welche die einzelnen Individuen eines großen Individuenkomplexes von dem Normaltypus bilden, sind dagegen in der Natur derselben und der sie beeinflussenden äußeren Umstände, bald positiv, bald negativ wirkenden Faktoren im Boden, Klima usw. gelegen. — Die Gültigkeit des ursprünglichen G. G. (Gaußschen Gesetzes) muß deshalb in dieser Hinsicht eine Einschränkung erfahren, indem es für durch die Natur bedingte Abweichungen der einzelnen Individuen von dem Durchschnittstypus nur je innerhalb der positiven und der negativen Seite der Abweichungen für sich zutrifft, d. h. Gauß setzt voraus, daß positive und negative Abweichungen gleich wahrscheinlich, und da die Gewißheit gleich 1, je gleich $^1/_2$ sind. Das Resultat, welches durch die Wirkung dieser Faktorenpaare zustande gebracht wird, ergibt sich dann durch die Entwicklung des Binoms $(^1/_2 + ^1/_2)^\infty$. Entwickelt man z. B. dieses Binom unter Annahme eines endlichen Exponenten statt des unendlichen, so erhält man ein symmetrisches Polygon. Es sei hierbei auf einen von Galton konstruierten, in Johannsens Erblichkeitslehre[1]) beschriebenen, sehr sinnreichen Apparat hingewiesen, der diese binominale Verteilung der durch Zufälligkeiten hervorgerufenen, vom Mittelwert abweichenden Varianten (wie wir die einzelnen Bestimmungen, das Maß des einzelnen Individuums nennen) sehr anschaulich demonstriert, und die Bedeutung der Binominalformel für die auf einen Individuenkomplex einwirkenden zufälligen Faktorenpaare bezw. für die symmetrische Verteilung der Varianten um den Mittelwert (mit der Abweichung 0) dartut.

Dieses Gesetz, daß die Verteilung der Individuen einer Variationsreihe um den Normaltypus in den einzelnen meß- und zählbaren Eigenschaften der Binominalformel folgt, ist von dem belgischen Anthropologen Quetelet zuerst entdeckt, von vielen anderen Forschern im allgemeinen bestätigt worden.

Der allgemeinste Ausdruck für die Binominalformel ist $(a + b)^n$, wobei der Exponent n alle Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen kann. Setzen wir $n = 1$, so erhalten wir $(a + b)^1 = a + b$, wobei uns nur die Koeffizienten der a und b bezw. von a^2, b^2, a b usw. interessieren, so daß wir für $a + b = \mathbf{1}.a + \mathbf{1}.b = 1 + 1$ erhalten; für $n = 2$: $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 = 1 + 2 + 1$; für $n = 3$: $(a + b)^3$ in der gleichen Weise $1 + 3 + 3 + 1$; für $n = 4$: $(a + b)^4$ in der gleichen Weise $1 + 4 + 6 + 4 + 1$; $(a + b)^{10}$ in der gleichen Weise $1 + 10 + 45 + 120 + 210 + \mathbf{252} + 210 + 120 + 45 + 10 + 1$.

[1]) Johannsen, a. a. O., S. 38.

Nehmen wir nun an, daß a die die positiven Abweichungen vom Mittel verursachenden Kräfte sind, b negativ wirkende, so sehen wir, daß die Zahl der größeren Abweichungen vom Mittel mit der Vermehrung der Faktorenpaare, also mit größerem n, das in obigem Fall bis 10, in der Natur aber nach Gauß bis ∞ ansteigt, fortschreitend stark sinkt. Die Zahl der Varianten vom Mittelwert fällt jedoch auf jeder Seite symmetrisch, so daß wir bei $(a + b)^{10}$ z. B. von dem Mittelwert 252 ab nach rechts und links dieselben Werte und dieselbe Zahl von Werten haben.

In gleicher Weise stehen sich nach dem ursprünglichen oder einfachen Gaußschen Gesetz, wie wir das bis jetzt erwähnte nennen wollen, in der Natur die beiden Glieder a und b der unendlich vielen Faktorenpaare gleich groß aber entgegengesetzt gerichtet gegenüber, das heißt eben, die Wahrscheinlichkeit für positive und negative Abweichungen ist gleich groß, $^1/_2$ gegen $^1/_2$ und das Resultat, welches durch die Wirkung dieser Faktorenpaare zustande gebracht wird, ergibt sich durch die Entwicklung des Binoms $(^1/_2 + ^1/_2)^{\infty}$. In dieser unendlichen Anzahl von Faktorenpaaren, welche als untergeordnete Kräfte in der Natur die Abweichungen der einzelnen Individuen einer Rasse in den einzelnen Eigenschaften vom Durchschnittstypus hervorrufen, ebenso wie in der gleichen Wahrscheinlichkeit der positiven und negativen Abweichungen liegen nun zwei Hauptvoraussetzungen des G. G. Betreffs der ersten Voraussetzung ist natürlich eine ∞ Anzahl von Einzelbestimmungen bezw. Einzelmessungen unmöglich, und man wird sich mit einer möglichst großen Zahl begnügen müssen, ebenso wie es bei der Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers der subjektiven Beobachtungen der Fall war. Anders liegt die Sache nun mit der gleichen Wahrscheinlichkeit der positiven und negativen Abweichungen. Wir haben gesehen, daß das G. G. eine symmetrische Verteilung der Werte bezüglich eines gegebenen Hauptwertes, z. B. des Durchschnittswertes, annimmt, wie es die Binominalformel bei $a = b$ ausdrückt.

Zum besseren Verständnis habe ich die theoretische Kurve der Binominalformel

$$(^1/_2 + ^1/_2)^{10} = 1,\ 10,\ 45,\ 120,\ 210,\ 252,\ 210,\ 120,\ 45,\ 10,\ 1$$

graphisch dargestellt. (Fig. 1 Tafel I.) Dazu trägt man entsprechend den 10 Faktorenpaaren auf der Abzisse in gleichen Abständen 11 Punkte in einem beliebigen Maßstab in gleicher Entfernung voneinander auf, und errichtet in den bezeichneten Punkten die Wahrscheinlichkeiten des Vorkommens der einzelnen Positionen, entsprechend der Reihen mit den Höhen 1, 10, 45, 120 usw. — Aus der Figur ist die Symmetrie derselben ersichtlich, indem beim Aufeinanderklappen der beiden Hälften um die Gerade der größten Wahrscheinlichkeit, also die größte Ordinate, die beiden Teile sich genau decken würden.

Bei einem Vergleich der verschiedenen empirischen Variationsreihen mit den theoretischen hat es sich gezeigt, daß die ersteren durchaus nicht so regelmäßige Symmetrie aufweisen, wie Gauß annahm. Namentlich

Pearson[1]), Heincke[2]), Duncker[3]), Davenport und Fechner[4]) haben auf die Asymmetrie verschiedener Variationspolygone hingewiesen. Besonders ist es Fechner, der in seiner Kollektivmaßlehre die Symmetrie, wo eine solche vorkommt, sogar als den besonderen Fall des allgemeinen Gesetzes der Asymmetrie von Kollektivgegenständen nachgewiesen hat, und dieses Gesetz das sogenannte zweispaltige G. G. im Gegensatz zum schon bekannten einfachen G. G. nennt. Den Beweis, daß tatsächlich Asymmetrie der allgemeine, Symmetrie der besondere Fall der Verteilung der Kollektivgegenstände um ihren Mittelwert ist, muß ich nach den umfangreichen Untersuchungen Fechners als erbracht annehmen. Da ich jedoch die Fechnersche Kollektivmaßlehre in manchen Teilen den folgenden Ausführungen zugrunde lege, bin ich gezwungen, einige von ihm eingeführte Bezeichnungen zu erklären. Fechner behandelt in seiner Kollektivmaßlehre, wozu die Variabilitätsmessung gehört, Kollektivgegenstände, das sind Gruppen, welche aus unbestimmt vielen, nach Zufall variierenden Exemplaren bestehen, die durch einen Art- oder Gattungsbegriff zusammengehalten werden. Weiter unterscheidet er räumliche und zeitliche K. G., ebenso wie K. G. im weiteren und engeren Sinne. Räumliche K. G. sind z. B. der Mensch, die Tiere, alles was in der Anthropologie, Zoologie, Botanik als Gattung oder Art in größerer oder geringerer Weite zusammengefaßt wird. Der Mensch im Gegensatz zu dem Tier ist ein K. G. im weiteren Sinne, der Mensch von bestimmtem Geschlecht, bestimmtem Alter, bestimmter Rasse, ebenso wie z. B. das Rind bestimmter Rasse ein K. G. im engeren Sinne. Sofern ein räumlicher K. G. verschiedene zu unterscheidende meßbare Teile und Dimensionen hat, werden diese Teile als besondere K. G. behandelt, so Schädel, Füße, Hände eines Menschen, oder Höhe, Breite, Gewicht usw. eines Tieres.

Die den K. G. allgemein zugrunde liegende Asymmetrie, der sich die Symmetrie nur speziell unterordnet, hat Fechner dazu geführt, neben dem bis jetzt allein berechneten arithmetischen Mittel A als Hauptwert zwei andere Hauptwerte, den Zentralwert C und den dichtesten Wert D der Variationsreihe zu berechnen; diese 3 Werte fallen nur bei einem symmetrischen Variationspolygon oder einer solchen Variationskurve zusammen, während sie um so mehr voneinander abweichen, je mehr die Asymmetrie zunimmt, so daß das arithmetische Mittel bei vielen K. G. durchaus nicht, wie man zumeist annimmt, den wahrscheinlichsten Wert desselben darstellt, sondern diese größte Wahrscheinlichkeit dem dichtesten Wert D zukommt. D liegt dabei um so weiter von A ab, je größer die Asymmetrie der Variationskurve ist; die Abweichungen (Θ) sind dabei statt von A von dem im Falle wesentlicher Asymmetrie auch wesentlich von A abweichenden dichtesten Wert D zu nehmen, und sind Größe und Richtung dieser Abweichungen selbst charakteristisch für verschiedene K. G., ebenso wie jeder Hauptwert seine charakteristische und zum Teil praktische Bedeutung für einen Kollektiv-

[1]) Biometrika.
[2]) Heincke und Ehrenbaum, Die Bestimmung der schwimmenden Fischeier.
[3]) Die Methode der Variationsstatistik.
[4]) Kollektivmaßlehre.

gegenstand hat, wozu er zur Unterscheidung derselben von anderen Kollektivgegenständen beiträgt. — Die Bedeutung der Bestimmung von D und C neben A liegt darin, daß wir es bei Variationsreihen der K. G. nicht allein mit Fehlern, die in der subjektiven Beobachtung liegen, zu tun haben, die eventuell als grobe Fehler ausgeschaltet werden müssen, sondern die Exemplare eines K. G. oder die Varianten sind gleich wirklich und gleich wahr, mögen sie noch so weit von A oder irgend einem anderen Hauptwert abweichen, und starke Abweichungen können in diesem Sinne nicht als grobe Fehler angesehen werden, die eliminiert werden müssen. Aus diesem Grunde kann die Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie oder die Ausgleichsrechnung in bezug auf Rindermessungen nicht in derselben Weise angewendet werden, wie es in der Physik, Geodäsie, Astronomie oder in neuester Zeit übertragen auf Berechnungen oder Resultate von Versuchsanstellungen in Chemie und Agrikulturchemie möglich und allein richtig ist. — So ist es z. B. klar, daß in einer Variationsreihe von Längenmaßen von Rekruten das größte Maß nicht ausgeschaltet werden kann, weil es z. B. den 5fachen wahrscheinlichen Fehler übersteigt. Dieses Längenmaß ist eben, wie ich schon betonte, wirklich und wahr und kann nur in variationsstatistischer Berechnung eventuell mit Hilfe der Kollektivmaßlehre richtige Deutung finden.

Die Variationsstatistik, diejenige Wissenschaft, welche sich auf der Grundlage des G. G. mit der Erforschung der Eigenschaften größerer Komplexe gleichartiger Individuen, also von K. G., beschäftigt, setzt uns in den Stand, bezüglich der meßbaren oder zählbaren Eigenschaften die rein zufälligen Unterschiede von den typischen Arten- und Rassenunterschieden zu unterscheiden.

Einen Maßstab für die Variabilität eines K. G., d. i. die individuelle Verschiedenheit verwandter Individuen, wie sie selbst in der allerengsten Verwandtschaft auftritt, z. B. der Exemplare einer Rinderrasse, bietet uns der wahrscheinliche Fehler des Mittelwertes, berechnet aus der Variationsreihe. Hedde[1]), Quante[2]) und andere, die sich mit der Variationsstatistik in bezug auf Halm- und Kornlängen befaßt haben, nehmen eine Differenz des 5fachen mittleren Fehlers $R = \frac{r}{\sqrt{n}}$ als außerhalb des Rassentypus stehend an, Römer[3]) zieht die engere Grenze des 4fachen und Johannsen[4]) des 3fachen oder gar doppelten R. Allerdings werden wir sehen, daß der 3fache mittlere oder wahrscheinliche Fehler Johannsens oder Standardwert, wie er ihn bezeichnet, mit dem 5fachen wahrscheinlichen Fehler des Mittelwerts nach der uns bekannten Formel berechnet, fast genau übereinstimmt, also der Standardwert erheblich größer ausfällt als der wahrscheinliche Fehler des Mittelwerts. Es ist daher nicht richtig, wenn Johannsen in seinem Buch annimmt, im 3fachen Standardwert eine engere Grenze zu ziehen, als es die

[1]) Landw. Versuchsstationen, 1903, Bd. 59.
[2]) a. a. O. S. 125.
[3]) Archiv für Rassen- und Gesellschaftskunde, 7. Jahrg., 1910, Heft 4.
[4]) a. a. O. S. 97.

anderen Forscher im 5fachen wahrscheinlichen Fehler der Mittelwerte tun. Andererseits werden die folgenden Ausführungen der Auffassung Johannsens recht geben, daß die Formen der Tiere, namentlich größerer, im ganzen mehr geschlossen sind, und deren Entwicklung schärfer begrenzt und feiner reguliert ist, als es für Pflanzen und kleinere tierische Organismen zutrifft. Dementsprechend sind die Störungen vom Mittelwert weniger groß, also die Variationsbreite als Rassengrenze kleiner.

Zur besseren Veranschaulichung der Variabilität ist es vorteilhaft, neben der rechnerischen Behandlung der Zahlenreihen sich der graphischen Darstellung zu bedienen. — Wir haben die symmetrischen bezw. asymmetrischen Polygone oder Variationspolygone kennen gelernt, die, je größer die Zahl der untersuchten Individuen ist, sich um so mehr einer Kurve nähern, der sogenannten Variationskurve. Die Konstruktion derselben kann mit sogenannten ganzen Varianten oder mit Klassenvarianten geschehen, wobei wir unter Variante die einzelne Bestimmung, ein „Maß" des betreffenden Individuums, verstehen. Ganze Varianten kommen nur bei Zählungen in Betracht, während bei allen Bestimmungen, bei denen Dimensionen als Varianten auftreten, Klassenvarianten benutzt werden, d. h. beträgt z. B. die Widerristhöhe eines Rindes 130 cm, so heißt das, die Widerristhöhe liegt zwischen 129,5 und 130,5, da wir nur mit 0,5 cm Genauigkeit messen. Wir haben also eine Klasse mit dem Spielraum von 1 cm, in die alle Maße von 129,5 bis 130,5 eingereiht sind, mit dem Klassenmittelwert 130,0. Fechner bezeichnet die Klassenvarianten als Umkreisintervalle und den Klassenmittelwert als Mitte des Intervalls. — Die Konstruktion der Variationskurven bei Klassenvarianten geschieht nun folgendermaßen.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem tragen wir auf der Abszisse die Klassengrenzen der Reihe nach in gleichen Abständen auf, errichten dann über denselben die Höhe entsprechend der Wahrscheinlichkeit bezw. des Vorkommens der betreffenden Variante als Ordinate, und vervollständigen über jedem Klassenwert mit dieser zugehörigen Ordinate ein Rechteck, wobei die Mitte der oberen Querseite den Klassenmittelwert darstellt. Die Areale der Rechtecke sind dann den betreffenden Individuen-Anzahlen proportional, so daß das Flächenmaß die Individuenzahl ausdrückt. Ein von Quetelet angeführtes Beispiel des Brustumfanges von 1516 Soldaten möge die Konstruktion der Variantenkurven erläutern. (Tabelle S. 11 und Fig. 2 Tafel I.) Die Klassenmittelwerte ersehen wir aus Spalte a. Mit z bezeichnen wir die Anzahl Maße, welche in die Klassengrenzen von 27,5—28,5 (also 2), 28,5—29,5 (4) usw. fallen. Diese Klassengrenzen tragen wir nun auf der Abszisse in einem beliebigen Maßstab auf, konstruieren entsprechend den zugehörigen z die Rechtecke, verbinden die Klassenmittelwerte und erhalten so ein sogenanntes Treppenpolygon oder Variationspolygon. Eventuell müssen je 2 Klassen zusammengefaßt werden, worauf wir weiter unten noch zu sprechen kommen werden. Im allgemeinen kann die Klasseneinteilung ganz willkürlich sein und richtet sich nur danach, welche Eigenschaften und welche Anzahl Individuen man zu messen hat.

Brustumfang von 1516 Soldaten.

a	z	a	z
28"	2	36"	251
29"	4	37"	181
30"	17	38"	103
31"	55	39"	42
32"	102	40"	19
33"	180	41"	6
34"	242	42"	2
35"	310		

Diese empirischen Kurven lassen sich nun mit der uns schon bekannten theoretischen symmetrischen Binominalkurve, die von den Biologen vielfach als ideale Variationskurve bezeichnet wird, vergleichen. Diese ideale Variationskurve wird, wie uns schon bekannt, erhalten durch Entwicklung des Binoms $(a + b)^{\infty}$, wobei $a = b = {}^1/_2$ und statt ∞ eine beliebig große Zahl, z. B. 20, als Exponent gesetzt wird. Die Zahlenwerte der einzelnen dabei erhaltenen Glieder werden dann auf die Gesamtsumme von 10000 reduziert, also in Prozehntausend angegeben. Dabei erhalten wir entsprechend der großen Zahl von Gliedern unendlich enge Klassen, so daß die Rechtecke auf Gerade zusammenschrumpfen und das ideale Variationspolygon in eine ideale Variationskurve oder Fehlerkurve übergeht. Eine solche ideale Variationskurve ist von Johannsen konstruiert, in Fig. 3 Tafel II als theoretische Variationskurve dargestellt und in den folgenden Ausführungen, auf den allgemein üblichen 5fachen Fehler von A, anstatt des 3fachen Standardwertes nach Johannsen, berechnet, als Grundlage benutzt worden. Selbstverständlich kann sie sehr leicht selbst konstruiert werden und muß nicht notgedrungen in diesem Maßstab und in dieser Form auftreten. Derjenige Punkt der Abszisse, welcher den Fußpunkt des Gipfels der Kurve darstellt, entspricht dem wahrscheinlichsten Wert der theoretischen Variationsreihe, also dem größten z, das bei der symmetrischen Kurve dem arithmetischen Mittel aller Glieder, mit der Abweichung o zukommt. Die Zahlen an der Grundlinie bedeuten den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels, so daß alle Werte auf der Grundlinie zwischen + und — 1 innerhalb des einfachen mittleren Fehlers von A liegen usw. Beinahe die ganze Kurve bewegt sich demnach zwischen dem 5fachen mittleren Fehler. In Zahlen ausgedrückt, liegen von 10000 Einheiten, welche das ganze Areal ausmachen, nur 25 außerhalb des 5fachen R. Diese, von der Symmetrie einer theoretischen Variationsreihe ausgehende Fehlerkurve kann man nun allerdings, wie schon mehrfach betont, im allgemeinen nicht zum Vergleich für die Bestimmung der Variabilität von Kollektivgegenständen heranziehen, da dieselben regelmäßig Asymmetrie, nur im besonderen Falle Symmetrie, aufweisen. Dementsprechend werden wir bei den Kollektivgegenständen schiefe Kurven zu erwarten haben. Es wird sich aber zunächst darum handeln, festzustellen, ob auch die meßbaren Eigenschaften der verschiedenen Rinderrassen wesentliche Asymmetrie aufweisen, derart, daß das arithmetische Mittel nicht als wahrscheinlichster Wert der Variationsreihe angesehen werden darf. Bevor ich jedoch auf Art und

Weise der Bestimmung des Asymmetriegrades und der einzelnen Hauptwerte übergehe, mag es angebracht sein, das bisher Gesagte nochmals kurz zusammenzufassen.

Wir haben gesehen, daß das Gaußsche Gesetz sowohl in bezug auf Beobachtungsfehler, als in bezug auf die Variabilität der Individuen eines K. G. Gültigkeit hat, allerdings in letzterem Falle als erweitertes zweispaltiges G. G., das auf die allgemeine Asymmetrie der K. G. Rücksicht nimmt. Diese Asymmetrie erfordert weiter die Bestimmung von 2 anderen Hauptwerten außer dem arithmetischen Mittelwert, des Zentralwertes C und des dichtesten Wertes D, woraus dann der Grad der Asymmetrie betimmt werden kann. Ein Vergleich der empirischen Reihe oder Kurve mit der theoretischen Fehlerkurve kann uns annähernd ein Bild von der Variabilität eines K. G. geben. Zweierlei ist aber bei unseren empirischen Reihen zu beachten. — 1. haben wir es mit Beobachtungsfehlern der Messungen an sich zu tun, die durch die Mangelhaftigkeit unserer Sinne, durch Aufrundung auf ganze oder halbe Zahlen usw. entstehen, also mit subjektiven Fehlern; 2. sind die Abweichungen der einzelnen Individuen von ihrem Mittelwert, sei es A, C oder D, also die Variabilität der Individuen zu berücksichtigen.

Beide Punkte sind bei einer einwandfreien Bestimmung des Durchschnittswertes des betreffenden K. G. zu beachten; es wäre daher falsch, lediglich den 1. Punkt zu berücksichtigen, da die Fehler nicht allein in den subjektiven Messungsfehlern, sondern überwiegend in der Variabilität der Individuen um ihren Mittelwert begründet sind. Die Messungsfehler sind nur durch Parallelmessungen festzustellen, und werde ich, da mir solche Parallelmessungen nicht zur Verfügung stehen, dieselben nach dem Vorschlag von Hedde[1]) nur schätzungsweise einführen, und muß ein genaueres Eingehen auf diesen 1. Punkt anderer Bearbeitung überlassen, die, soviel ich weiß, von der Gesellschaft für Züchtungskunde in Gang gesetzt ist. Die schätzungsweise Feststellung des wahrscheinlichen Fehlers der Messungen an sich ist jedoch wohl imstande, genaue Beobachtungen in dieser Richtung vorläufig genügend zu vertreten, weil er verhältnismäßig groß angenommen ist. Zu diesem wahrscheinlichen Fehler des Mittels der subjektiven Fehler der Messungen tritt nun der wahrscheinliche Fehler der Variabilität.

Der gesamte wahrscheinliche Fehler R einer empirischen Variationsreihe setzt sich also aus R_1 (dem wahrscheinlichen Fehler aus den subjektiven Beobachtungen), wozu neben persönlichen Fehlern des Beobachters die Fehler aus fehlerhaften Apparaten gehören, und R_2, dem durch die Variabilität durch Boden, Klima, Fütterung, Haltung, im allgemeinen durch einseitig wirkende Einflüsse bedingten wahrscheinlichen Fehler zusammen, nach der Formel

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Gehen wir nun dazu über, die dargelegten Grundsätze der Fehlerwahrscheinlichkeitstheorie und Variationsstatistik auf Rindermessungen anzuwenden.

---

[1]) a. a. O., S. 380.

Wie schon einleitend bemerkt, beschränke ich mich nicht darauf, lediglich die von mir genommenen Maße am Glatzer Gebirgsvieh in den Bereich dieser Untersuchungen zu ziehen, nicht nur, weil jeder Vergleich fehlen würde, sondern auch, weil die verhältnismäßig geringe Zahl von gemessenen Tieren und die größere Unausgeglichenheit dieser im Übergang befindlichen Rasse kein klares und vergleichsbrauchbares Bild zu geben imstande wäre. Aus diesem Grunde habe ich noch zwei andere Rinderrassen untersucht, die, ausgeglichener, bereits umfangreiche Messungen erfahren haben, an welchen aber Untersuchungen über die Anwendung der Fehlertheorie und Variationsstatistik bisher nicht vorgenommen wurden.

Als erstes Beispiel habe ich eine Rinderrasse gewählt, die bekanntlich durch jahrzehntelange zielbewußte Zucht sehr ausgeglichen ist und bereits Messungen in großem Stil erfahren hat. Es ist dies der Rotbunte Rheinische Tieflandschlag, bei welchem Schmidt[1]) Messungen an 372 Kühen von über 3 Jahren vorgenommen hat, deren Widerristmaße unserer ersten Betrachtung zugrunde liegen sollen. Diese bilden in ihrer wahllosen Reihenfolge (Tabelle S. 14 u. 15 Spalten a) die sogenannte Urliste. — Die einzelnen Maßzahlen der Urliste (a), die alle auf 1 cm abgerundet sind, stellen die einzelnen Varianten dar, die wir zur rechnerischen Behandlung der Größe nach ordnen und in Klassen von 1 cm zusammenfassen. Damit erhalten wir die sogenannte primäre Verteilungsliste oder -Tafel (Tabelle S. 16, Spalte 1, 2 u. 3), in der die Maße a (Spalte 1) eine progressiv aufsteigende Kolumne bilden, die jedes a nur einmal enthält, während die Zahl z (Spalte 2) angibt, wie oft dieses a in der Urliste auftritt. Diese Verteilungstafel, die von grundlegender Bedeutung für die folgende Berechnung ist, läßt uns schon manches erkennen. Vor allem zeigt sie uns den persönlichen Fehler des Beobachters, indem die sämtlichen Maße, wie schon erwähnt, auf ganze Zentimeter abgerundet sind. Die Maßeinheit (E) ist also 1 cm. Den ganzen Spielraum zwischen 121 cm und 142 cm, innerhalb welcher Grenzen alle in diesem Beispiel gemessenen Varianten sich finden, heißt man vielfach Variationsweite oder Variationsbreite, sie beträgt in diesem Falle $142 - 121 = 21$ cm. Die Variationsbreite oder absolute Schwankungsweite, welchen Ausdruck Fechner verwendet, ändert sich selbstverständlich mit der Zahl der Varianten, weshalb sie in dieser Form nicht als Maß der Variation von Individuen gleicher Rasse und von gleichem Lebensort, nach Johannsen gleich der fluktuierenden Variabilität, gelten kann. Ein Maß, das sich besser in dieser Hinsicht eignet, ist die sogenannte mittlere relative Schwankung, die zu der Zahl der Varianten im Verhältnis steht. Dieselbe berechnet sich für symmetrische Variation nach der Formel

$$\eta_c = \frac{\Sigma \Theta \text{ bez. A}}{\sqrt{m(m-1)}} \text{ bezw. } \frac{\Sigma \triangle}{\sqrt{m(m-1)}}$$

wobei Θ = Abweichungen und $\triangle$ = Abweichungen bezüglich des arithmetischen Mittelwerts A bedeutet, $\Sigma\triangle$ = Summe der Abweichungen bez. A; m = Anzahl der Varianten. Bei asymmetrischer Variation müssen die Ab-

[1]) a. a. O. S. 94—132, Literaturangabe Nr. 4.

Urliste des Rotbunten Rheinischen Tieflandschlages.

A = 129,97.

a	Differenz	a	Differenz	a	Differenz	a	Differenz	a	Differenz
129,0	— 0,97	131,0	+ 1,03	125,0	— 4,97	128,0	— 1,97	127,0	— 2,97
135,0	+ 5,03	131,0	+ 1,03	132,0	+ 2,03	130,0	+ 0,03	134,0	+ 4,03
131,0	+ 1,03	133,0	+ 3,03	128,0	— 1,97	133,0	+ 3,03	127,0	— 2,97
135,0	+ 5,03	133,0	+ 3,03	126,0	— 3,97	133,0	+ 3,03	128,0	— 1,97
130,0	+ 0,03	133,0	+ 3,03	133,0	+ 3,03	136,0	+ 6,03	129,0	— 0,97
136,0	+ 6,03	136,0	+ 6,03	128,0	— 1,97	130,0	+ 0,03	128,0	— 1,97
135,0	+ 5,03	125,0	— 4,97	132,0	+ 2,03	135,0	+ 5,03	125,0	— 4,97
132,0	+ 2,03	128,0	— 1,97	130,0	+ 0,03	131,0	+ 1,03	132,0	+ 2,03
132,0	+ 2,03	135,0	+ 5,03	125,0	— 4,97	130,0	+ 0,03	133,0	+ 3,03
129,0	— 0,97	136,0	+ 6,03	123,0	— 6,97	127,0	— 2,97	127,0	— 2,97
130,0	+ 0,03	128,0	— 1,97	133,0	+ 3,03	130,0	+ 0,03	125,0	— 4,97
135,0	+ 5,03	131,0	+ 1,03	128,0	— 1,97	129,0	— 0,97	130,0	+ 0,03
134,0	+ 4,03	131,0	+ 1,03	124,0	— 5,97	127,0	— 2,97	133,0	+ 3,03
132,0	+ 2,03	126,0	— 3,97	126,0	— 3,97	128,0	— 1,97	137,0	+ 7,03
137,0	+ 7,03	134,0	+ 4,03	129,0	— 0,97	136,0	+ 6,03	129,0	— 0,97
128,0	— 1,97	125,0	— 4,97	128,0	— 1,97	135,0	+ 5,03	132,0	+ 2,03
127,0	— 2,97	130,0	+ 0,03	132,0	+ 2,03	129,0	— 0,97	127,0	— 2,97
132,0	+ 2,03	130,0	+ 0,03	125,0	— 4,97	130,0	+ 0,03	128,0	— 1,97
132,0	+ 2,03	131,0	+ 1,03	128,0	— 1,97	123,0	— 6,97	131,0	+ 1,03
132,0	+ 2,03	130,0	+ 0,03	129,0	— 0,97	124,0	— 5,97	129,0	— 0,97
134,0	+ 4,03	128,0	— 1,97	129,0	— 0,97	128,0	— 1,97	126,0	— 3,97
131,0	+ 1,03	131,0	+ 1,03	128,0	— 1,97	124,0	— 5,97	137,0	+ 7,03
135,0	+ 5,03	129,0	— 0,97	127,0	— 2,97	124,0	— 5,97	129,0	— 0,97
132,0	+ 2,03	129,0	— 0,97	132,0	+ 2,03	130,0	+ 0,03	131,0	+ 1,03
134,0	+ 4,03	126,0	— 3,97	130,0	+ 0,03	131,0	+ 1,03	129,0	— 0,97
128,0	— 1,97	126,0	— 3,97	131,0	+ 1,03	137,0	+ 7,03	127,0	— 2,97
130,0	+ 0,03	130,0	+ 0,03	128,0	— 1,97	129,0	— 0,97	130,0	+ 0,03
131,0	+ 1,03	134,0	+ 4,03	129,0	— 0,97	130,0	+ 0,03	130,0	+ 0,03
128,0	— 1,97	131,0	+ 1,03	129,0	— 0,97	130,0	+ 0,03	130,0	+ 0,03
135,0	+ 5,03	134,0	+ 4,03	130,0	+ 0,03	130,0	+ 0,03	133,0	+ 3,03
131,0	+ 1,03	135,0	+ 5,03	131,0	+ 1,03	127,0	— 2,97	133,0	+ 3,03
132,0	+ 2,03	130,0	+ 0,03	127,0	— 2,97	127,0	— 2,97	128,0	— 1,97
131,0	+ 1,03	132,0	+ 2,03	133,0	+ 3,03	124,0	— 5,97	133,0	+ 3,03
137,0	+ 7,03	130,0	+ 0,03	131,0	+ 1,03	131,0	+ 1,03	127,0	— 2,97
130,0	+ 0,03	136,0	+ 6,03	133,0	+ 3,03	128,0	— 1,97	127,0	— 2,97
129,0	— 0,97	129,0	— 0,97	127,0	— 2,97	129,0	— 0,97	128,0	— 1,97
129,0	— 0,97	129,0	— 0,97	126,0	— 3,97	125,0	— 4,97	123,0	— 6,97
131,0	+ 1,03	130,0	+ 0,03	122,0	— 7,97	131,0	+ 1,03	130,0	+ 0,03
134,0	+ 4,03	124,0	— 5,97	124,0	— 5,97	129,0	— 0,97	129,0	— 0,97
133,0	+ 3,03	129,0	— 0,97	130,0	+ 0,03	127,0	— 2,97	131,0	+ 1,03
129,0	— 0,97	124,0	— 5,97	125,0	— 4,97	127,0	— 2,97	134,0	+ 4,03
130,0	+ 0,03	127,0	— 2,97	121,0	— 8,97	128,0	— 1,97	136,0	+ 6,03
132,0	+ 2,03	128,0	— 1,97	131,0	+ 1,03	137,0	+ 7,03	129,0	— 0,97
130,0	+ 0,03	121,0	— 8,97	131,0	+ 1,03	130,0	+ 0,03	123,0	— 6,97
								130,0	+ 0,03
								129,0	— 0,97
								130,0	+ 0,03
								130,0	+ 0,03
5799,0	— 13,73	5719,0	+ 58,78	5649,0	+ 25,51	5677,0	+ 46,66	6223,0	+ 50,69
	+ 94,05		— 58,46		— 95,19		— 68,34		— 66,25

Urliste des Rotbunten Rheinischen Tieflandschlages.

a	Differenz	a	Differenz	a	Differenz	a	Differenz
133,0	+ 3,03	126,0	— 3,97	134.0	+ 4,03	129,0	— 0,97
127,0	— 2,97	126,0	— 3,97	130,0	+ 0,03	133,0	+ 3,03
128,0	— 1,97	130,0	+ 0,03	132,0	+ 2,03	131,0	+ 1,03
129,0	— 0,97	125,0	— 4,97	130,0	+ 0,03	133,0	+ 3,03
134,0	+ 4,03	128,0	— 1,97	130,0	+ 0,03	133,0	+ 3,03
131,0	+ 1,03	130,0	+ 0,03	128,0	— 1,97	131,0	+ 1,03
127,0	— 2,97	128,0	— 1,97	131,0	+ 1,03	129,0	— 0,97
138,0	+ 8,03	124,0	— 5,97	136,0	+ 6,03	131,0	+ 1,03
139,0	+ 9,03	126,0	— 3,97	129,0	— 0,97	126,0	— 3,97
132,0	+ 2,03	125,0	— 4,97	131,0	+ 1,03	132,0	+ 2,03
131,0	+ 1,03	130,0	+ 0,03	133,0	+ 3,03	125,0	— 4,97
135,0	+ 5,03	134,0	+ 4,03	127,0	— 2,97	132,0	+ 2,03
130,0	+ 0,03	130,0	+ 0,03	130,0	+ 0,03	130,0	+ 0,03
136,0	+ 6,03	129,0	— 0,97	128,0	— 1,97	127,0	— 2,97
125,0	— 4,97	127,0	— 2,97	130,0	+ 0,03	128,0	— 1,97
130,0	+ 0.03	129,0	— 0,97	129,0	— 0,97	122,0	— 7,97
130,0	+ 0,03	131,0	+ 1,03	134,0	+ 4,03	127,0	— 2,97
130,0	+ 0,03	128,0	— 1,97	133,0	+ 3,03	130,0	+ 0,03
135,0	+ 5,03	131,0	+ 1,03	132,0	+ 2,03	125,0	— 4,97
131,0	+ 1,03	128,0	— 1,97	132,0	+ 2,03	129,0	— 0,97
136,0	+ 6,03	134,0	+ 4,03	127,0	— 2,97		
133,0	+ 3.03	137,0	+ 7,03	133,0	+ 3,03		
142,0	+ 12,03	129,0	— 0,97	132,0	+ 2,03		
132,0	+ 2,03	123,0	— 6,97	131,0	+ 1,03		
126,0	— 3.97	132,0	+ 2,03	132,0	+ 2,03		
127,0	— 2,97	131,0	+ 1,03	129,0	— 0,97		
132,0	+ 2,03	137,0	+ 7,03	130,0	+ 0,03		
132,0	+ 2,03	138,0	+ 8,03	132,0	+ 2,03		
131,0	+ 1,03	132,0	+ 2,03	130,0	+ 0,03		
128,0	— 1,97	132,0	+ 2,03	133,0	+ 3,03		
130,0	+ 0,03	133,0	+ 3,03	134,0	+ 4,03		
130,0	+ 0,03	136,0	+ 6,03	127,0	— 2,97		
129,0	— 0,97	130,0	+ 0,03	133,0	+ 3,03		
130,0	+ 0,03	131,0	+ 1,03	126,0	— 3,97		
128,0	+ 1,97	123,0	— 6,97	128,0	— 1,97		
129,0	+ 0,97	131,0	+ 1,03				
122,0	— 7,97	128,0	— 1,97				
126,0	— 3,97	130,0	+ 0,03				
135,0	+ 5,03	133,0	+ 3,03				
127,0	— 2,97	128,0	— 1,97				
122,0	— 7,97	132,0	+ 2,03				
126,0	— 3,97	129,0	— 0,97				
128,0	— 1,97	129,0	— 0,97				
126,0	— 3,97						
131,0	+ 1,03						
128,0	— 1,97						
126,0	— 3,97						
132,0	+ 2,03						
131,0	+ 1,03						
131,0	+ 1,03						
6517,0	+ 83,90	5585,0	+ 55,69	4576,0	+ 48,75	2583,0	+ 16,30
	— 65,40		— 59,40		— 21,70		— 32,70

+	—
94,05	13,73
58,78	58,46
25,51	95,19
46,66	68,34
50,69	66,25
83,90	65,40
55,69	59,40
48,75	21,70
16,30	32,70
+ 480,33	— 481,17

+ 480,33
— 481,17

$\Sigma \triangle = 961{,}50$

$$\eta_c = \frac{961{,}50}{\sqrt{372\ (372-1)}}$$

$$\eta_c = \frac{961{,}50}{\sqrt{138\,012}}$$

$$\eta_c = \frac{961{,}5}{371{,}5}$$

Schwankungs- oder Variationskoeffizient

$\eta_c = \mathbf{2{,}59}$

A = 129,97.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Klassenmittelwert a	= z	Grenzen der Klassen cm	Θ von A	Θ^2	z . a^2	Klassengrenzen	Θ von der Klassengrenze	Θ in Standardwerten
						120,5	— 9,47	— 2,812
121	2	120,5—121,5	— 8,97	80,4609	160,9218	121,5	— 8,47	— 2,515
122	4	121,5—122,5	— 7,97	63,5209	254,0836	122,5	— 7,47	— 2,218
123	6	122,5—123,5	— 6,97	48,5809	291,4854	123,5	— 6,47	— 1,921
124	9	123,5—124,5	— 5,97	35,6409	320,7681	124,5	— 5,47	— 1,624
125	14	124,5—125,5	— 4,97	24,7009	346,7926	125,5	— 4,47	— 1,327
126	16	125,5—126,5	— 3,97	15,7609	252,2244	126,5	— 3,47	— 1,030
127	28	126,5—127,5	— 2,97	8,8209	246,9852	127,5	— 2,47	— 0,733
128	40	127,5—128,5	— 1,97	3,8809	155,2360	128,5	— 1,47	— 0,436
129	42	128,5—129,5	— 0,97	0,9209	38,6778	129,5	— 0,47	— 0,139
						Mittel	0	0
130	57	129,5—130,5	+ 0,03	0,0009	0,0513	130,5	+ 0,53	+ 0,157
131	43	130,5—131,5	+ 1,03	1,0609	45,6187	131,5	+ 1,53	+ 0,454
132	33	131,5—132,5	+ 2,03	4,1209	135,9897	132,5	+ 2,53	+ 0,751
133	27	132,5—133,5	+ 3,03	9,1809	247,8843	133,5	+ 3,53	+ 1,048
134	15	133,5—134,5	+ 4,03	16,2409	243,6135	134,5	+ 4,53	+ 1,345
135	13	134,5—135,5	+ 5,03	25,3009	328,9117	135,5	+ 5,53	+ 1,642
136	11	135,5—136,5	+ 6,03	36,3609	399,9699	136,5	+ 6,53	+ 1,939
137	8	136,5—137,5	+ 7,03	49,4209	395,3672	137,5	+ 7,53	+ 2,236
138	2	137,5—138,5	+ 8,03	64,4809	128,9618	138,5	+ 8,53	+ 2,533
139	1	138,5—139,5	+ 9,03	81,5409	81,5409	139,5	+ 9,53	+ 2,830
140	0	139,5—140,5	—	—	—	140,5	+10,53	+ 3,127
141	0	140,5—141,5	—	—	—	141,5	+11,53	+ 3,424
142	1	141,5—142,5	+12,03	144,7209	144,7209	142,5	+12,53	+ 3,721
	372				4219,8048			

$$\Sigma z \,.\, a^2 = 4219{,}8048$$

$$\text{Beobachtungen} = 372$$

$$\sqrt{\frac{\Sigma z \,.\, a^2}{m}} = \pm\ 3{,}37$$

$$\sigma = \pm\ 3{,}37$$

$$\text{Standardwert des Klassenspielraumes} = \frac{1 \text{ cm}}{3{,}37} = 0{,}297.$$

weichungen statt bez. A, bez. C oder D genommen werden, wobei wir der Abkürzung halber die Abweichung bez. C mit Θ kurzweg, und die Abweichungen bez. D mit δ bezeichnen, so daß für C

$$\text{der Schwankungswert } \frac{\Sigma \Theta}{\sqrt{m\,(m-1)}}$$

$$\text{für D } \text{„ } \frac{\Sigma \delta}{\sqrt{m\,(m-1)}}$$

Das arithmetische Mittel aus den 372 Widerristmaßen des Rotbunten Rheinischen Tieflandschlages ist 129,97. Die Abweichungen der einzelnen

10	11	12	13	14	15
Gefunden pro Zehntausend	Höhe der Rechtecke	Gefunden in Doppelklassen	Berechnet in Doppelklassen	Gefunden pro 10000 in Doppelklassen	Höhe der Rechtecke in Doppelklassen
			1		
53	18	6	4	161	27
108	36				
162	54	15	17	404	67
242	81				
376	126	30	36	806	136
430	144				
750	252	68	67	1830	308
1080	364				
1129	380	99	85	2661	448
1532	515				
1156	389	76	78	2043	343
887	298				
726	244	42	50	1129	199
403	135				
349	117	24	23	645	108
296	99				
214	72	10	7	267	45
53	18				
27	9	1	3	27	4
—	—				
—	—	1	0,3	27	4
27	9				

Varianten von A berechnen wir in der Urliste (Tabelle S. 14 u. 15) in den Kolumnen — Diffz. — neben den angegebenen Maßen mit + und — Abweichungen vom Mittel. — Einfacher ist es, nachdem die Verteilungstafel gewonnen ist, die Abweichungen aus dieser zu berechnen, derart, daß man die einzelnen Abweichungen der Varianten vom Mittelwert mit dem zugehörigen z multipliziert und die positiven und negativen Abweichungen addiert. Als Summe der + Abweichungen erhalten wir = 480,33, als Summe der — Abweichungen = 481,17. Die Summe der + und — Abweichungen wird absolut genommen, so daß $\Sigma\triangle = 961{,}50$ beträgt.

Wir sehen, daß keine große Differenz zwischen der Σ der $-\triangle$ und der Σ der $+\triangle$ besteht, so daß, wie aus der Verteilungsliste selbst schon hervorgeht, beinahe theoretisch, auf jeden Fall aber praktisch, die Voraussetzung für das einfache G. G. zutrifft, nach welcher die Zahl der + Varianten gleich der Zahl der — Varianten ist. Es weist dies schon darauf hin, daß die Variationsreihe einer ausgeglichenen Rasse fast symmetrisch in ihrer Verteilung um den Mittelwert wird, und die von Fechner nachgewiesene Asymmetrie verläßt. Bei Konstruktion der Variationskurve werde ich noch-

mals ausführlicher auf diesen Punkt, auf den Quante[1]) schon in seinen botanischen Untersuchungen hinweist, zurückkommen.

Haben wir nun $\Sigma \triangle = 961{,}50$ bestimmt, so erübrigt es sich noch, diesen Wert zur Bestimmung der mittleren Schwankungsweite mit $\sqrt{m(m-1)}$ zu dividieren. m = die Zahl der Varianten = 372 oder gleich Σz. Durch Ausziehen der Quadratwurzel aus 372.371 = 138012 oder durch logarithmische Berechnung erhalten wir (Tabelle Seite 15) für η_c (korrigierten Schwankungswert) den Wert 2,59, der dem von Johannsen berechneten Variationskoeffizienten entspricht. Dieser Wert eignet sich besser als die erwähnte Variationsbreite als vergleichsweises Maß der Veränderlichkeit eines Gegenstandes, da er weniger von der Zahl der Varianten beeinflußt wird. Vergleichen wir die Formel für den korrigierten mittleren Schwankungswert mit der für r, so sehen wir, daß sich die letztere nur durch den Faktor 0,845 unterscheidet. Die Formel für r ist genauer und wird uns später den hier berechneten Variationskoeffizienten ersetzen.

Kehren wir zu unserer Verteilungstafel S. 16, Spalten 1—3 zurück und betrachten den Verlauf der z (Spalte 2). Wir sehen dieselben von 2 entsprechend einem a von 121,0 bezw. 120,5—121,5, bis 57 konstant anwachsen und dann bis z = 1 entsprechend einem a von 142 bezw. = 141,5—142,5 abfallen, und zwar fast regelmäßig, wenn auch nicht in gleichen Werten auf der positiven und negativen Seite. Mit der Variante a = 139,0 beginnt die Verteilungstafel unregelmäßig zu werden, indem erst die Variante 142 wieder durch ein z = 1 vertreten ist. Die Varianten 140 und 141 finden sich in der Urliste nicht und sind hier nur der Übersicht und Berechnung wegen als sogenannte leere a mit z = 0 eingeschoben. Dadurch erhält die Tafel formal in ihrer ganzen Ausdehnung einen äquidistanten Bestand von a, der sich ursprünglich nur bis 139,0 erstreckte. — Der sogenannte mittlere Hauptbestand von dem Maximal z = 57 aus gerechnet, reicht von z = 2 oben bis z = 1 unten für a = 139 (die Varianten 140 und 141 sind nur theoretisch eingefügt), und zwar völlig gleichmäßig in je 9 Werten von 57 ab nach oben und unten. Nach dem von Fechner ausgearbeiteten Verfahren wäre es möglich, den Wert von 141 mit z = 1 durch sogenannte Reduktion, d. h. Vergrößerung der Intervalle bezw. Klassen von 1 auf 3 cm in den Hauptbestandteil hereinzuziehen, wodurch der Verlauf der Varianten von 121,0—142,0 ohne das Einschieben leerer a völlig gleichmäßig würde. Die große Regelmäßigkeit der Tafel, die nur um den einen Wert 142,0 gestört wird, läßt uns davon absehen, und diesen Wert nur in bezug auf die Variationsbreite und die Variabilität berücksichtigen. —

Die große Regelmäßigkeit der Verteilungstafel und die verhältnismäßige Übereinstimmung der Summe der + und — Abweichungen weist, wie schon hervorgehoben, auf Symmetrie der Variationsreihe hin, für welche ein weiterer Beweis in dem Zusammenfallen der drei Hauptwerte A, C und D liegt. — Bevor wir uns jedoch der Berechnung dieser Hauptwerte nach der Fechnerschen Kollektionsmaßlehre zuwenden, mag eine graphische Darstellung, wie

[1]) a. a. O., S. 162.

wir sie S. 10 u. Tafel I Fig. 2 schon kennen gelernt haben, die Verteilungsverhältnisse anschaulicher, als es die Variationsreihe imstande ist, dartun. — Dazu benutzen wir die Formel der Wurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat, oder die von Johannsen angegebene Formel der Standardabweichung, die ein Maß der Variation sowohl in positiver als negativer Richtung gibt.

$$\text{Standardabweichung} = \sigma = \pm\sqrt{\frac{\Sigma z a^2}{m}}.$$

Das Zeichen für Summe $= \Sigma$ ist uns schon bekannt; in diesem Falle bedeutet $\Sigma z a^2$, daß die Produkte der einzelnen z mit dem Quadrat der entsprechenden Θ summiert werden (Tabelle S. 16, Spalten 4—6), so daß $\Sigma z a^2$ die Summe aller dieser Produkte ist, welche dann durch **m**, die Zahl der Beobachtungen, dividiert und aus dem ganzen Quotienten die Wurzel gezogen wird. Dieser Wert $\sigma = +\sqrt{\frac{\Sigma z a^2}{m}}$ muß jedoch noch eine Korrektion erfahren nach der Formel $\sigma_c = \pm\sqrt{\frac{\Sigma z a^2 - b^2}{m}}$, wobei b die mittlere Abweichung vom arithmetischen Mittel ($A = 129{,}97$) darstellt und in folgender Weise berechnet wird:

In Tabelle S. 16 fällt das größere $z = 57$ auf den Klassenmittelwert 130. Diesen Klassenmittelwert nimmt man als Ausgangspunkt und stellt nun die Zahl der Varianten mit den gleich großen Abweichungen folgendermaßen zusammen:

Das größte $z = 57$ entspricht dem Klassenmittelwert 130.

	Θ	+	—	Differenz +	Differenz —
131 u. 129	1	43	42	+ 1	
132 „ 128	2	33	40		— 7
133 „ 127	3	27	28		— 1
134 „ 126	4	15	16		— 1
135 „ 125	5	13	14		— 1
136 „ 124	6	11	9	+ 2	
137 „ 123	7	8	6	+ 2	
138 „ 122	8	2	4		— 2
139 „ 121	9	1	2		— 1
140 „ (120)	10	0	—		
141 „ (119)	11	0	—		
142 „ (118)	12	1	—	+ 1	

Die Klassenmittelwerte 131 und 129 haben beide die Abweichung 1 von 130, und z von + 43 und — 42, mit der Differenz + 1.

Die positiven und negativen Differenzen werden nun mit den zugehörigen z für sich multipliziert und dann addiert.

Positive Zahlen	Negative Zahlen
1.1 = 1	7.2 = 14
2.6 = 12	1.3 = 3
2.7 = 14	1.4 = 4
1.12 = 12	1.5 = 5
	2.8 = 16
	1.9 = 9
+ 39	− 51

$\Sigma z \,.\, a$ ist -12 und $\frac{\Sigma z \,.\, a}{m} = \frac{-12}{372} = -0{,}03.$

$b = -0{,}03$, das Quadrat $= +0{,}0009$, also so klein, daß es vernachlässigt und die Standardabweichung $\sigma = \pm 3{,}37$ beibehalten werden kann. — Darauf bestimmt man den Standardwert des Klassenspielraumes. Der Klassenspielraum = 1 cm, also der Standardwert desselben $= \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{3{,}37} = 0{,}297$ (s. S. 16). Der Mittelwert 129,97 liegt zwischen den Klassengrenzen 129,5 und 130,5 (Tabelle S. 16, Spalte 7), die die Θ von − 0,47 bezw. + 0,53 besitzen (Spalte 8). Die Standardwerte dieser Θ sind $\frac{-0{,}47}{\sigma} = \frac{-0{,}47}{3{,}37}$ bezw. $\frac{+0{,}53}{3{,}37} = 0{,}1394$ bezw. + 0,157 (Spalte 9).

Die Summe der beiden Standardwerte muß den Standardwert des Klassenspielraumes, also = 0,297 geben, was der Fall ist. Nun werden die Standardwerte der folgenden Klassengrenzen nach oben und unten berechnet derart, daß der Standardwert

bez. $128{,}5 = -(0{,}1394 \,.\, \sigma + \mathbf{1} \,.\, 0{,}297 \,.\, \sigma) = -0{,}436 \,.\, \sigma$
„ $127{,}5 = -(0{,}1394 \,.\, \sigma + \mathbf{2} \,.\, 0{,}297 \,.\, \sigma) = -0{,}733 \,.\, \sigma$
usw.
„ $131{,}5 = +\ 0{,}1572 \,.\, \sigma + \mathbf{1} \,.\, 0{,}297 \,.\, \sigma = +0{,}454 \,.\, \sigma$
„ $132{,}5 = +\ 0{,}1572 \,.\, \sigma + \mathbf{2} \,.\, 0{,}297 \,.\, \sigma = +0{,}891 \,.\, \sigma$

ist.

Mit Hilfe der Dreisatzrechnung berechnet man, wieviele Prozehntausend nach der theoretischen Verteilungstafel gefunden werden sollen zwischen dem Mittelwert = 129,97 und den verschiedenen Klassengrenzen (S. 17, Spalte 10), um das empirische Material in unser Kurvenschema einzeichnen und vergleichen zu können. Auf der Abszisse der idealen Variationskurve trägt man dann die Standardwerte der Klassengrenzen auf, die den Punkten der Klassengrenzen selbst entsprechen, errichtet in den Punkten Ordinaten und konstruiert aus den gleichen Grundlinien und den auf 10 000 berechneten Höhen (Spalte 11) die Rechtecke, welche der empirisch gefundenen Individuenzahl entsprechen. Die Höhen erhält man durch Dividieren mit dem 10fachen Standardwert des Klassenspielraumes in die Anzahl Individuen in jeder Klasse pro Zehntausend. Fig. 3 Tafel II stellt sowohl den Verlauf der theoretischen als auch den der empirischen Kurve unserer Variationsreihe dar. Die Übereinstimmung ist verhältnismäßig sehr gut, da berücksichtigt werden muß,

daß eine völlige Übereinstimmung nur bei einem unendlichen m zu erwarten ist. Um die Verteilungsfehler, welche durch die relativ enge Klasseneinteilung bedingt sind, besser auszugleichen, faßt man gewöhnlich 2 Klassen zusammen, und rechnet mit Doppelklassen (Spalte 12—15 S. 17). Dabei ist zu beachten, daß man dann, um die Höhen zu erhalten, statt mit dem 10fachen Standardwert des Klassenspielraumes mit dem 2.10fachen zu dividieren hat. Zum Vergleich habe ich auch diese Kurve eingezeichnet, welche erheblich besser mit der theoretischen übereinstimmt und auch die scheinbare Hochgipfligkeit verschwinden läßt, während sich der Gipfelpunkt etwas verschiebt, so daß die Kurve schief aussieht. Diese, wie wir sehen werden, ganz unbedeutende Schiefheit, wird durch die Reduktion hervorgerufen. Pearson und Thiele[1]) haben nun eine Formel aufgestellt, mit welcher wir den Schiefheits- oder Asymmetriegrad der Kurven feststellen können:

$$S = \left(\frac{\Sigma z \,.\, a^3}{m} - 3b \,.\, \frac{\Sigma z \,.\, a^2}{m} + 2b^3\right) : \sigma^3.$$

Die Berechnung erfolgt ganz entsprechend der bereits mitgeteilten von b, nur daß die Differenzen statt mit 1, 2, 3, 4 usw. mit 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, bezw. 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, multipliziert werden, um Σaz^3 und Σaz^2 zu erhalten.

+ Werte der za^3		− Werte der za^3		
1. 1^3 =	1	7.2^3 =	56	+ 2847
2. 6^3 =	432	1.3^3 =	27	− 2027
2. 7^3 =	686	1.4^3 =	64	$\Sigma z \,.\, a^3$ = + 820
1.12^3 =	1728	1.5^3 =	125	
Sa	+ 2847	2.8^3 =	1024	
		1.9^3 =	729	
		Sa	− 2025	

$$\frac{\Sigma za^3}{m} = \frac{+820}{372} = +2{,}2043 \text{ Klassenspielräume}$$

$$b = -0{,}03$$

$$\frac{\Sigma za^2}{m} = 11{,}35$$

$$\sigma = \pm 3{,}37$$

$$\frac{\Sigma za^3}{m} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2{,}2043$$

$$-3b \,.\, \frac{\Sigma za^2}{m} = -(+3 \,.\, 0{,}03 \,.\, 11{,}35) = +1{,}0215$$

$$+2b^3 = 0$$

$$3{,}2258$$

$$S = \frac{3{,}2258}{38{,}273} = \frac{+0{,}08}{}$$

$$\sigma^3 = 38{,}273.$$

Da nach den von Thiele vorgenommenen Untersuchungen an Variationskurven Schiefheiten unter 0,25 klein zu nennen sind, während wir oberhalb

[1]) Siehe Johannsen, Elemente der exakten Erblichkeitslehre, S. 192.

0,50 von bedeutender Schiefheit sprechen, ist tatsächlich die Schiefheit oder Asymmetrie + 0,08 ganz unbedeutend, und nur durch die Endlichkeit des n verursacht. Nach den von Johannsen u. a. angestellten Untersuchungen sind die Variationskurven, wie in unserem Fall, nicht immer eingipflig, sondern können auch zwei- und mehrgipflig auftreten. Die Eingipfligkeit weist fast immer nach den Untersuchungen des genannten Forschers darauf hin, daß das Material der Variationsreihe einer Rasse angehört, während die Mehrgipfligkeit fast in allen bis jetzt untersuchten Fällen Gemenge von Rassen ergeben hat, ohne daß deshalb, wie Johannsen ausdrücklich betont, das Material eingipfliger Kurven genotypisch zu sein braucht. Auf diesen Punkt komme ich später kurz zurück. Bemerkenswert ist für eingipflige symmetrische Kurven ferner, daß bei denselben dem arithmetischen Mittelwert, nach dem gleichen Autor, die Bedeutung eines typischen Wertes beikommt. Im Typus versteht Johannsen mit vielen anderen Forschern, die sich mit Variabilitätsstudien beschäftigen, vom Standpunkt der Variationsstatistik aus dasjenige Maß einer Beschaffenheit oder diejenige Intensität einer Eigenschaft, um welche die zum betreffenden, einheitlich aufgefaßten Bestand gehörigen Individuen variieren, derart, daß dieses Beschaffenheitsmaß, rein zahlenmäßig ausgedrückt, die Mitte oder das Zentrum der Abweichungen ist. So haben wir, wenn wir Symmetrie für unsere empirische Kurve annehmen, wozu wir nach Vorhergehendem nahezu berechtigt wären, in der Zahl 129,97 den Typus der Widerristhöhe des Rotbunten Rheinischen Tieflandschlages. Hätten wir jedoch Asymmetrie der Verteilung erkannt, so würde A nicht dem typischen Wert entsprechen. — Wenn nun auch, wie bemerkt, aus den bisher zur Berechnung herangezogenen Kriterien vermutet werden kann, daß, entgegen der Fechnerschen Auffassung, unsere Variationsreihe wesentlich symmetrische Verteilungsverhältnisse aufweist, kann es zur einwandfreien Klarlegung dieser Verhältnisse bei den Rinderrassen doch nicht unterlassen werden, zu untersuchen, ob auch das Hauptkriterium, daß die 3 Hauptwerte zusammenfallen, zutrifft.

Vor der Berechnung dieser 3 Werte A, C und D noch einige Worte über die Beziehungen derselben zueinander und ihre Hauptmerkmale. — Ein Charakteristikum für A ist, daß die Summe der positiven Abweichungen der Varianten von A ($\triangle'$) = der Σ der negativen derselben ($\triangle_,$) ist, so daß die Summe der Quadrate aller $\triangle$ ein Minimum ist ($\triangle$ = Abweichungen bez. A). Nach Fechner[1]) hat man zwar im arithmetischen Mittel A den Schwerpunkt des ganzen Größenkomplexes, aber von der näheren Beschaffenheit und der Struktur desselben erhält man erst durch Hinzuziehen der beiden anderen Hauptwerte C und D und der bezüglich derselben gebildeten Θ Kenntnis.[2])

Der Zentralwert C unterscheidet sich von A dadurch, daß während bez. A die Summe der positiven und $-\Theta$ gleich ist, bez. C die Zahl der $+\Theta$ = der Zahl der $-\Theta$ ist, und daß während bez. A die Summe der

[1]) Fechner, Kollektivmaßlehre.

[2]) Quante, a. a. O., S. 128.

Quadrate der Θ ein Minimum ist, bez. C. die Summe der einfachen Θ ein Minimum ist. Der Wert C liegt bei asymmetrischen Variationsreihen allgemein zwischen A und D.

Was nun den sogenannten dichtesten Wert D anbetrifft, so haben wir, empirisch bestimmt, in ihm den Wert, der dem größten z einer nicht zu unregelmäßigen primären oder reduzierten Verteilungstafel entspricht. Um dieses Maximal z, das in unserem Beispiel 57 beträgt, ordnen sich die z ihrer Größe nach gegen die Enden der Tafel nach oben (') und unten (,) abfallend, so daß um dasselbe die Einzelwerte am dichtesten liegen. Der dichteste Wert ist der wahrscheinlichste, da ihm die meisten z zukommen.

Bestimmung von A.

Da Rechenfehler infolge der vielen rechnerischen Operationen leicht möglich sind, benütze ich nach dem auch von Quante[1]) angewendeten Verfahren verschiedene, von Fechner angegebene Formeln zur Kontrolle für die Berechnung der einzelnen Hauptwerte.

Der nach der Formel

I. $A = \frac{\Sigma a}{m}$ berechnete Wert $= \frac{48\,348}{372}$[2]) $= 129{,}97$ cm, ist bereits bekannt.

A kann außerdem berechnet werden nach

II. $A = \frac{m \,.\, E' - z_{,} \,.\, i}{m}$

III. $A = \frac{m \,.\, E_{,} + z' \,.\, i}{m}$

Hierzu erweitern wir unsere Verteilungstafel um Hilfsspalten z.a, S, u. S'[1]). Durch Summierung der za erhalten wir Σa oder Σaz. Die S, bezw. S' erhalten wir auf folgende Weise: Das erste S, von oben ist gleich dem ersten z, das zweite gleich dem ersten + zweiten, das dritte gleich dem ersten + zweiten + dritten usw., das letzte also gleich der $\Sigma z = m$. Das Verfahren für die Berechnung von S' ist dasselbe, nur von unten angefangen. Diese erweiterte Verteilungstafel S. 24 bildet in der Hauptsache die Grundlage für die Berechnung von A, C und D.

Kehren wir zu unseren Kontrollformeln II und III für A zurück. In denselben bedeutet E' das äußerste, obere Extrem der Klassenmittelwerte, E, das untere Extrem. z' und z, bedeuten $\Sigma S'$ bezw. $\Sigma S_{,}$, je vermindert um m, die Anzahl der Varianten. i ist gleich dem Klassenwert oder Intervall = 1 cm. Da i in unserem Fall der sogenannten primären Verteilungstafel entnommen ist, wird der Wert i als primäres Intervall bezeichnet. In unserem Beispiel ist

$$E' = 142,\ z' = 3708 - 372 = 3336$$
$$E_{,} = 121,\ z_{,} = 4848 - 372 = 4476$$
$$i = 1.$$

---

[1]) a. a. O., S. 134.

[2]) Tabelle S. 24.

$$\text{II. } A = \frac{372 \,.\, 142 - 4476 \,.\, 1}{372} = \frac{48348}{372} = 129{,}97$$

$$\text{III. } A = \frac{372 \,.\, 121 + 3336 \,.\, 1}{372} = \frac{48348}{372} = 129{,}97$$

Wir erhalten eine völlige Übereinstimmung der 3 Werte für A.

Bestimmung des Zentralwerts C.

Den Zentralwert C kann man gleich dem wahrscheinlichen Fehler eines Beobachtungsmittels in demselben Sinne als den wahrscheinlichen Wert eines K. G. bezeichnen, die Wertmitte, die ebenso oft unterschritten, wie überschritten wird. Die Bestimmung von C hat nur Bedeutung für die Voraussetzung asymmetrischer Verteilung der K. G.

Grenzen der Klassen	Klassen-Mittelw.	z	a . z	S,	S'
120,5—121,5	121	2	242	2	372
121,5—122,5	122	4	488	6	370
122,5—123,5	123	6	738	12	366
123,5—124,5	124	9	1116	21	360
124,5—125,5	125	14	1750	35	351
125,5—126,5	126	16	2016	51	337
126,5—127,5	127	28	3556	79	321
127,5—128,5	128	40	5120	119	293
128,5—129,5	129	42	5418	161	253
129,5—130,5	**130**	**57**	**7410**	**218**	**211**
130,5—131,5	131	43	5633	261	154
131,5—132,5	132	33	4356	294	111
132,5—133,5	133	27	3591	321	78
133,5—134,5	134	15	2010	336	51
134,5—135,5	135	13	1755	349	36
135,5—136,5	136	11	1496	360	23
136,5—137,5	137	8	1096	368	12
137,5—138,5	138	2	276	370	4
138,5—139,5	139	1	139	371	2
139,5—140,5	140	0	0	(371)	(1)
140,5—141,5	141	0	0	(371)	(1)
141,5—142,5	142	1	142	372	1
		372	48348	4848	3708

Die Bestimmung von C erfolgt nach den beiden Formeln

$$\text{I. } C = g_1 + \frac{\frac{m}{2} - v}{z_0} \,.\, i$$

und

$$\text{II. } C = g_2 - \frac{\frac{m}{2} - n}{z_0} \,.\, i.^{1})$$

[1]) Fechner, a. a. O., S. 169.

Dazu ist folgendes zu bemerken: Das Intervall, dem das größte z zukommt, bezeichnet man als Eingriffsintervall und z_0 als den Wert z, dem dieses Intervall zukommt, also in unserem Beispiel $z_0 = 57$; a_0 ist das dazugehörige $a = 130{,}0$; v ist die Vorzahl, d. i. diejenige Zahl, welche der Spalte des Eingriffsintervalls, durch die fettgedruckten Ziffern gekennzeichnet, in der Hilfsspalte S, (Tabelle S. 24) vorangeht; $v = 161$. In derselben Weise ist n die Nachzahl der Spalte des Eingriffsintervalls in S'; $n = 154$.

g_1 ist die unterste Grenze des Eingriffsintervalls, g_2 die oberste, also $g_1 = 129{,}5$; $g_2 = 130{,}5$.

$$i = 1; \quad \frac{m}{2} = 186.$$

$$\text{I. } C = 129{,}5 + \frac{186 - 161}{57} . 1 = 129{,}94.$$

$$\text{II. } C = 130{,}5 - \frac{186 - 154}{57} . 1 = 129{,}94.$$

Bestimmung von D.

Zur genauen Bestimmung des für die Kollektivmaßlehre überaus wichtigen Wertes D gibt es zwei Methoden, die eine ziemlich umständliche Rechenarbeit erfordern. Hierbei ist es wesentlich, nach der Berechnungsart zwei Werte für D zu unterscheiden, den sogenannten empirisch dichtesten Wert, den Fechner mit Di bezeichnet, und den theoretischen wahrscheinlichen Wert Dp.

Die Bestimmung von Di erledigt sich mittelst der Formeln:

$$\text{I. } Di = g_1 + \frac{(z_0 - z_{-1}) . i}{(z_0 - z_{-1}) + (z_0 - z_1)}$$

$$\text{II. } Di = g_2 - \frac{(z_0 - z_1) . i}{(z_0 - z_1) + (z_0 - z_{-1})}.$$

Auch hier sucht man zunächst das Intervall mit dem Maximal z auf; g_1, g_2, z_0 und i sind schon bei der Bestimmung von C berechnet. z_1 ist das nach dem oberen Extrem zu liegende $z = 42$; z_{-1} das in entgegengesetzter Richtung liegende $= 43$, so daß wir erhalten:

$$\text{I. } Di = 129{,}5 + \frac{(57 - 43) . 1}{(57 - 43) + (57 - 42)}$$

$$= 129{,}5 + \frac{14}{15 + 14} = \mathbf{129{,}98}$$

$$\text{II. } Di = 130{,}5 - \frac{(57 - 42) . 1}{(57 - 42) + (57 - 43)}$$

$$= 130{,}5 - \frac{14}{14 + 15} = \mathbf{129{,}98}.$$

Während nun die Existenz von Di unabhängig von dem Bestehen eines Verteilungsgesetzes ist, und der obige Wert nur in successiver Annäherung durch Interpolation bestimmt werden kann, erhalten wir den genaueren Wert Dp, der nach dem Proportionsverfahren abgeleitet ist, auf der Grundlage des uns schon bekannten Verteilungsgesetzes, des sogenannten

zweispaltigen G. G. Der Gang der Tafelwerte entspricht niemals völlig den Forderungen des Gesetzes, weshalb zur Bestimmung des Unterschiedes ihrer Lage als auch zu der eines genaueren Wertes neben Di der Wert Dp bestimmt wird. —

Zur Bestimmung von Dp ist es zunächst nötig, folgende Hilfswerte zu berechnen:

$$\text{I. } \alpha = \frac{4\ z_0}{i\,.\,m^2}\,(\Sigma a'' - \Sigma a_{''})$$

$$\text{II. } \beta = \frac{4\ z_0{}^2\,(C - A)^2\ ^1)}{i^2\ m^2}.$$

$\Sigma a''$ bedeutet die Summe aller a, also aller Varianten oberhalb C, $\Sigma a_{''}$ ebenso unterhalb C.

Für $\Sigma a''$ besteht die Formel:

$$\Sigma a'' = N + \frac{(i - X)\,.\,z_0}{i}\left(g_2 - \frac{(i - X)}{2}\right)$$

$$\Sigma a_{''} = V + \frac{X\,.\,z_0}{i}\left(g_2 + \frac{X}{2}\right)$$

Wie v und n die sogenannte Vorzahl bezw. Nachzahl bedeutet, wird unter N bezw. V die Vorsumme bezw. Nachsumme der a . z verstanden, welchen auf die oberhalb bezw. unterhalb liegenden Intervalle, in welchem C sich befindet, fallen. $X = C - g_1$: die anderen Werte der Formeln sind bekannt.

$$V = 20\,444$$

$$N = 20\,494$$

$$X = C - g_1 = 129{,}94 - 129{,}50 = 0{,}44$$

$$\Sigma a'' = 20\,494 + \frac{(1 - 0{,}44)\,.\,57}{1}\left(130{,}5 - \frac{1 - 0{,}44}{2}\right)$$

$$= 20\,494 + 31{,}92\,.\,130{,}22 = \mathbf{24\,650{,}62}$$

$$\Sigma a_{''} = 20\,444 + \frac{0{,}44\,.\,57}{1}\left(129{,}5 + \frac{0{,}44}{2}\right)$$

$$= 20\,444 + 3253{,}38 = \mathbf{23\,687{,}38}.$$

Berechnen wir nun $\Sigma a'' - \Sigma a_{''} = 953{,}24$ und setzen in unsere Formeln α und β ein, so erhalten wir

$$\text{I. } \alpha = \frac{4\,.\,57}{1\,.\,372^2}\,.\,953{,}24 = \mathbf{1{,}57}$$

$$\text{II. } \beta = \frac{4\,.\,3249\,.\,0{,}0009}{1\,.\,372^2} = \mathbf{0{,}000085}.$$

Es wird nun der Reihe nach:

$$\xi_1 = \alpha - 1;$$

$$\xi_2 = \alpha - 1 - \frac{\beta}{\xi_1};$$

$$\xi_3 = \alpha - 1 - \frac{\beta}{\xi_2};$$

$$\xi_4 = \alpha - 1 - \frac{\beta}{\xi_3} \text{ usw.}$$

---

[1]) Fechner, a. a. O., S. 194.

bestimmt, bis der dafür gefundene Wert mit dem vorhergehenden in den ersten 3 Dezimalstellen übereinstimmt,[1]) und wenn dies der Fall ist, aus dem letztgefundenen Werte ξ der Wert von Dp aus $X = Dp - C$ (1) hergeleitet.

Nun ist $X = \frac{C - A}{\xi}$; also, wenn für X in (1) $\frac{C - A}{\xi}$ eingesetzt wird.

$$Dp = C + \frac{C - A}{\xi}$$

$$\xi_1 = 1{,}57 - 1 = \mathbf{0{,}57}$$

$$\xi_2 = 1{,}57 - 1 - \frac{0{,}00009}{0{,}57}$$

$$= 0{,}57 - 0{,}016 = \mathbf{0{,}554}$$

$$\xi_3 = 0{,}57 - \frac{0{,}00009}{0{,}554}$$

$$= 0{,}57 - 0{,}016 = \mathbf{0{,}554}.$$

$$Dp = C + \frac{C - A}{\xi_3}$$

$$Dp = 129{,}94 + \frac{129{,}94 - 129{,}97}{0{,}554}$$

$$= 129{,}94 = \frac{0{,}03^{2})}{0{,}554} = 129{,}94 + 0{,}05 = \mathbf{129{,}99}.$$

Die Hauptwerte unserer Variationsreihe sind nun folgende:

$$A = 129{,}97$$
$$C = 129{,}94$$
$$Di = 129{,}76$$
$$Dp = 129{,}99.$$

Wie ersichtlich, fallen die 4 bezw. 3 Hauptwerte praktisch völlig zusammen, mit welchem weiteren sicheren Beweis für die Symmetrie der untersuchten Variationsreihe die Kriterien in dieser Hinsicht erschöpft sein mögen.

Der Wert 129,97 ist demnach in der symmetrischen Variationsreihe der typische Wert der Widerristhöhe, welcher jedoch nun noch, wie zu Beginn dieser Ausführungen betont, mit einem wahrscheinlichen Fehler behaftet ist, der sich aus dem wahrscheinlichen Fehler R_1, aus subjektiven Messungsfehlern, und R_2, aus dem Variationsfehler zusammensetzt und nach der Formel

$$R = \pm\sqrt{R_1^2 + R_2^2} \text{ berechnet.}$$

Den Fehler R_1, kurz Messungsfehler, bestimmen wir in Ermangelung von durch wiederholte Messungen gewonnenen Unterlagen, durch Schätzung derart, daß wir annehmen, der größte Fehler (grobe Fehler unberücksichtigt) sei gleich der Größe des Intervalls oder gleich 1 cm. — Hedde[3]) schätzt den größtmöglichen Fehler nur zur Hälfte des Intervalls, jedoch ist zu beachten,

---

[1]) Fechner, a. a. O., S. 194.

[2]) Absolut abgenommen.

[3]) Hedde, Landw. Versuchsstationen, Bd. 59, 1903, S. 384.

daß die Untersuchungen an Pflanzen, Körnern usw. im Zimmer doch erheblich genauer vorgenommen werden können, als dies bei den Messungen an Rindern unter oft schwierigen Verhältnissen der Fall ist, weshalb ein Fehler zu 1 cm, ja vielleicht zu mehr zu rechtfertigen, ja wohl richtiger ist.

Wir dürfen nun annehmen, daß auch diese geschätzten Fehler der Gaußschen Fehlerkurve folgen, in welcher der Fehler von 1 cm am höchsten steht, und den 5fachen oder vielleicht besser 4fachen Messungsfehler repräsentiert.

Der wahrscheinliche Messungsfehler ist demnach $\frac{10}{4} = 0{,}25$ cm und der wahrscheinliche Messungsfehler des Mittels der Beobachtungen $R_1 = \frac{0{,}25}{\sqrt{372}} = 0{,}014$ cm.

$$r = 0{,}845 \cdot \frac{\pm [v]}{\sqrt{m(m-1)}}$$

$$r = \frac{0{,}845 \cdot 961{,}50}{\sqrt{372 \cdot (372-1)}}$$

$$\mathbf{r = 2{,}19.}$$

R_2 erhalten wir aus der S. 4 erwähnten Formel

$$R_2 = \frac{0{,}845 \pm [v]}{m\sqrt{m-1}}$$

wobei $[v] = \Sigma\Theta$ bez. A = 961,50; m = der Zahl der Beobachtungen = 372

$$R_2 = \pm \frac{0{,}845 \cdot 961{,}5}{372\sqrt{371}} = \pm \mathbf{0{,}11}$$

Da nun der gesamte wahrscheinliche Fehler aus Messungs- und Variationsfehler

$$R = \pm \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \text{ besteht,}$$

ist der Anteil der Variation

$$R_2 = \pm \sqrt{R^2 - R_1^2}$$

$$R_2 = \pm \sqrt{0{,}11^2 - 0{,}014^2}$$

$$R_2 = \pm \sqrt{0{,}0119}$$

$$R_2 = \pm 0{,}109.$$

Praktisch entfällt also fast der ganze wahrscheinliche Fehler auf die Variation, denn selbst wenn wir einen schätzungsweisen Fehler von 2 cm annehmen, wird R_2 nur um 0,003 kleiner.

Multiplizieren wir nun die Gesamtzahl der Beobachtungen, also 372 mit den in Tabelle S. 3 angegebenen Wahrscheinlichkeiten, so erhalten wir folgende theoretische Fehlerkurve, der wir die empirische aus Tabelle S. 16 u. 17 berechnet gegenüberstellen:

	r = 2,19 cm		theoretische Fehlerkurve	empirische Fehlerkurve
			39,9	
Zwischen	0 u. 0,4r =	0,88 liegen	**79,1**	**57**
			116,9	**142**
„	0 „ 0,8r =	1,75 „	**152,7**	
			186,0	**215**
„	0 „ 1,2r =	2,63 „	**216,4**	
			243,7	**270**
„	0 „ 1,6r =	3,5 „	**267,7**	
			288,4	**301**
„	0 „ 2,0r =	4,38 „	**306,0**	
			320,7	**328**
„	0 „ 2,4r =	5,26 „	**332,8**	
			342,4	**348**
„	0 „ 2,8r =	6,13 „	**350,1**	
			356,0	**354**
„	0 „ 3,2r =	7,01 „	**360,5**	
			363,9	**362**
„	0 „ 3,6r =	7,88 „	**366,3**	
„	0 „ 3,8r =	8,32 „	368,2	**368**
„	0 „ 4,0r =	8,76 „	**369,4**	
„	0 „ 4,2r =	9,20 „	370,3	**371**
„	0 „ 4,4r =	9,64 „	**370,8**	
„	0 „ 4,6r =	10,07 „	371,3	
„	0 „ 4,8r =	10,50 „	**371,6**	
„	0 „ 5,0r =	10,95 „	371,7	

Ein Vergleich der beiden Zahlenreihen zeigt, daß dieselben, wenn auch nicht vollständig, doch relativ sehr gut übereinstimmen. Unterschiede in den Werten der beiden Reihen sind nicht auf asymmetrische Verteilungsverhältnisse, sondern auf das endliche m, sowie auf unbestimmte Zufälligkeiten zurückzuführen. — Ein anschaulicheres Bild, als die Reihen, geben uns die mit Hilfe derselben konstruierten Kurven. In ein rechtwinkliges Koordinatensystem werden die Reihen eingetragen, und zwar so, daß auf der Ordinate der wahrscheinliche Fehler von 0—5r, und auf der Abszisse die Zahl der entsprechenden Beobachtungen aufgetragen wird. (Fig. 4, Tafel II.) Die so gefundenen Punkte werden verbunden und es zeigt die eine Kurve den Verlauf der theoretischen, die andere den der empirischen Variationsreihe. Aus der Zeichnung geht noch deutlicher als aus dem Reihenvergleich die geradezu ideale Annäherung der beiden Kurven hervor, womit abermals der Beweis erbracht ist, daß wir es in dem besprochenen Beispiel mit wesentlich symmetrischen, nicht asymmetrischen Verhältnissen zu tun haben. — Aus der Zeichnung ersehen wir auch, daß bereits beim 4fachen wahrscheinlichen Fehler die beiden Kurven zusammenlaufen, so daß wir bei ausgeglichenen Rinderrassen mit dem 4fachen wahrscheinlichen Fehler als sichere Grenze auskommen werden. — Damit liefert uns das arithmetische Mittel

= 129,97 tatsächlich den typischen Wert der Widerristhöhe des Rotbunten Rheinischen Tieflandschlages, denjenigen Wert, dessen Abweichung = 0 ist. — Schon wiederholt habe ich betont, daß der Mittelwert nur einem kleinen Teil der betreffenden Individuen einer Rasse entspricht, und als Probe einer viel zahlreicheren Reihe von Möglichkeiten und Wirklichkeiten aufgefaßt werden muß. Ein Maß für die Zuverlässigkeit dieser Probe betreffs der wahren Beschaffenheit gibt uns der bereits berechnete gesamte wahrscheinliche Fehler des Mittels.

$$R = \pm 0{,}11,$$

so daß wir als Typus der Widerristhöhe unseres Beispiels

$$\mathbf{129{,}97 \pm 0{,}11}$$

bezüglich der wahrscheinlichen Grenzen des Mittels;

$$\mathbf{129{,}97 \pm 0{,}44}$$

bezüglich der sicheren Grenzen des Mittels bezeichnen müssen, d. h. der wahrscheinliche Mittelwert schwankt zwischen **129,86** und **130,08**, der sichere Mittelwert oder wahre Mittelwert aber zwischen **129,53** und **130,41**. Johannsen benutzt, wie ich schon anführte, den 3fachen mittleren Fehler und berechnet den mittleren Fehler des Mittels (in unserem Falle R) aus $Q = \frac{\pm \sigma}{\sqrt{m}}$ (S. 19). Danach erhalten wir für $Q = \frac{\pm 3{,}37}{\sqrt{372}} = \pm 0{,}18$ und wäre demnach der sichere Mittelwert

$$129{,}97 \pm 3 \cdot 0{,}18 =$$
$$\mathbf{129{,}97 \pm 0{,}54}$$

was mit dem unsrigen übereinstimmt, wenn wir den 5fachen mittleren Fehler als sichere Grenze auffassen. Der 3fache Wert des wahrscheinlichen Fehlers, wie ihn Johannsen benützt, bildet also durchaus keine Verschärfung in der Variationsbreite, wie es den Anschein haben könnte. —

Die Arbeit erscheint vollständig in den Mitteilungen der Landwirtschaftlichen Institute der Universität Breslau, VI. Bd., Heft 4.

Druck von Hermann Beyer & Söhne (Beyer & Mann) in Langensalza.

Lebenslauf.

Am 12. August 1884 wurde ich, Wilhelm Zorn, evgl. K. als Sohn des Kaufmanns Adolf Zorn zu Memmingen im Allgäu, Kreis Schwaben und Neuburg, Bayern, geboren. Nach sechsjährigem Besuch der dortigen Volksschule absolvierte ich die Königliche sechsklassige Realschule ebendort, studierte dann ein Jahr an der Chemisch-Technischen Abteilung der Königlichen Industrieschule in München, um im folgenden Jahre meiner Militärpflicht in Kempten i./Allgäu zu genügen. Hierauf erlernte ich praktisch den Landwirtschaftsbetrieb, zuerst in Schabringen bei Lauingen an der Donau, dann in Mering bei Augsburg, studierte alsdann vier Semester an der Landwirtschaftlichen Akademie in Weihenstephan, absolvierte dieselbe und war hierauf wieder über ein Jahr als zweiter Inspektor auf der Domäne Trankwitz, Kreis Marienburg in Westpreussen praktisch tätig. Im Anschluss daran studierte ich dann zwei Semester Landwirtschaft an der Universität Leipzig, woselbst ich das Tierzuchtinspektor-Examen ablegte. Nach einer abermaligen zweimonatlichen Praxis auf dem Gute Taarnborg bei Korsoer in Dänemark wurde ich ab 1. November 1908 als Assistent am Institut für Tierproduktionslehre an der Universität Breslau angestellt und hatte hier noch Gelegenheit, zwei Semester Vorlesungen zu hören. Vom 1. Februar bis 11. Juli 1910 nach Augsburg beurlaubt, erwarb ich mir dort nachträglich das Reifezeugnis der Oberrealschule. Seit 11. Juli 1910 bin ich wieder als Assistent bei Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Holdefleiss angestellt. Meine praktische Tätigkeit in der Landwirtschaft erstreckte sich im Ganzen auf ca. 3 Jahre.

Während meiner Studienzeit besuchte ich die Vorlesungen und Uebungen folgender Herren Professoren und Dozenten:

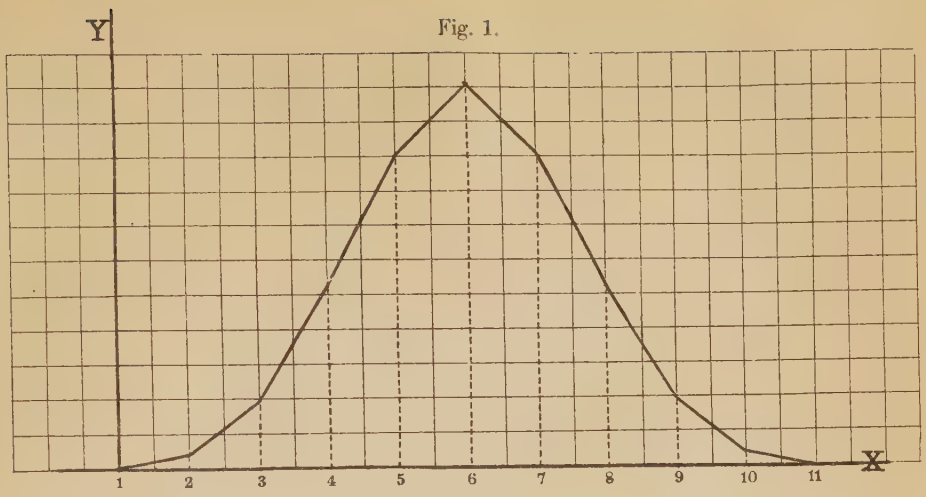
In Weihenstephan: Wagner, Henkel, Kraus, Pauly, Leisewitz, Steuert †, Albrecht, Höflich, Puchner, Wein †, Bücheler, Ganzenmüller, Weiss, Ulsch, v. Renauld, Mayr †;

In Leipzig: Kirchner, Falke, Eber, Löhnis, Stieda, Hasse †, Wolterek, Richter, Lipps;

In Breslau: Holdefleiss, Pfeiffer, Kükenthal.

Allen meinen hochverehrten Lehrern drücke ich an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus, in erster Linie aber meinem hochverehrten Herrn Lehrer und Chef, Herrn Geh. Regierungsrat Professor Dr. Holdefleiss, dessen Anregung die vorliegende Arbeit ihre Entstehung verdankt, der mir in liebenswürdigster Weise Zeit und Rat während der Ausführung zur Verfügung stellte, dessen hochherzigen Sinn ich während meiner zweijährigen Assistentenzeit als Schüler und Assistent, in jeder Angelegenheit kennen lernen und an mir selbst erfahren durfte.

Fig. 1.



$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^{10}$

Fig. 2.

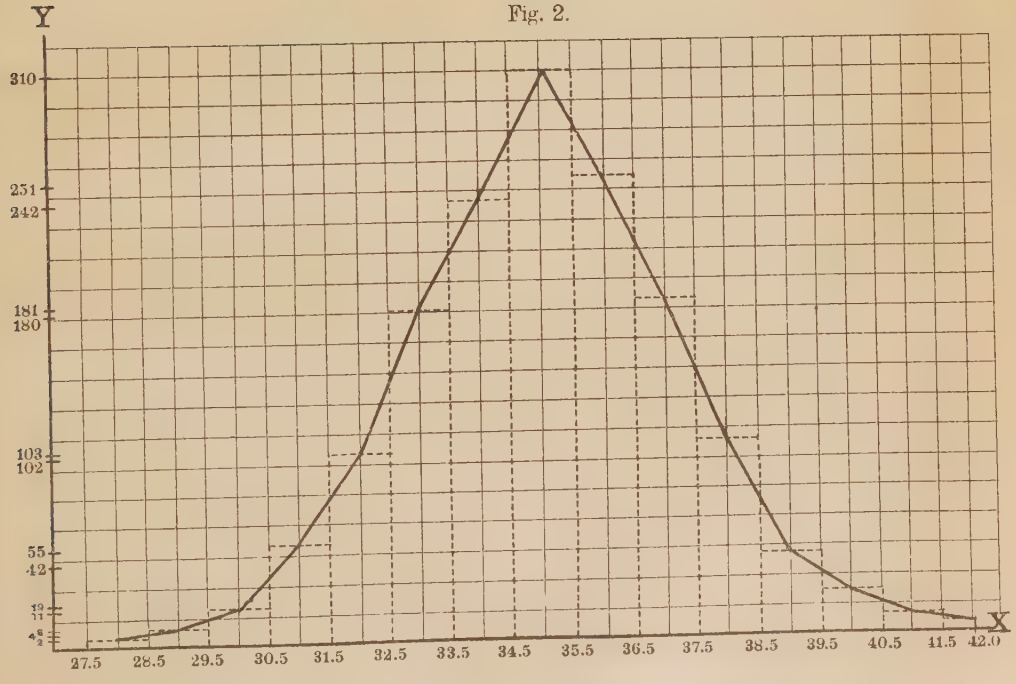


Fig. 3.

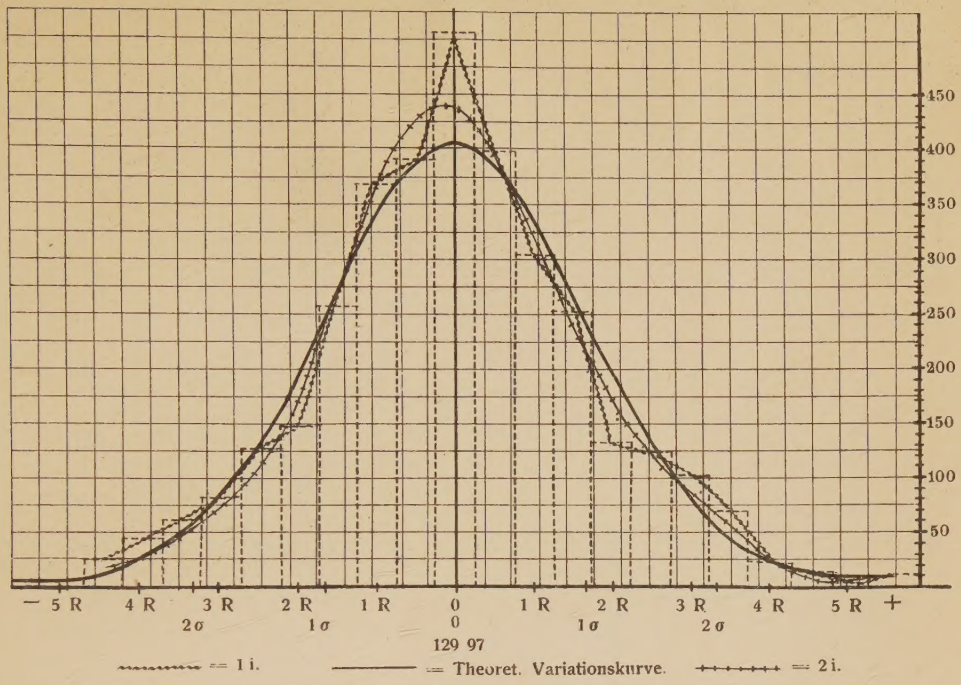
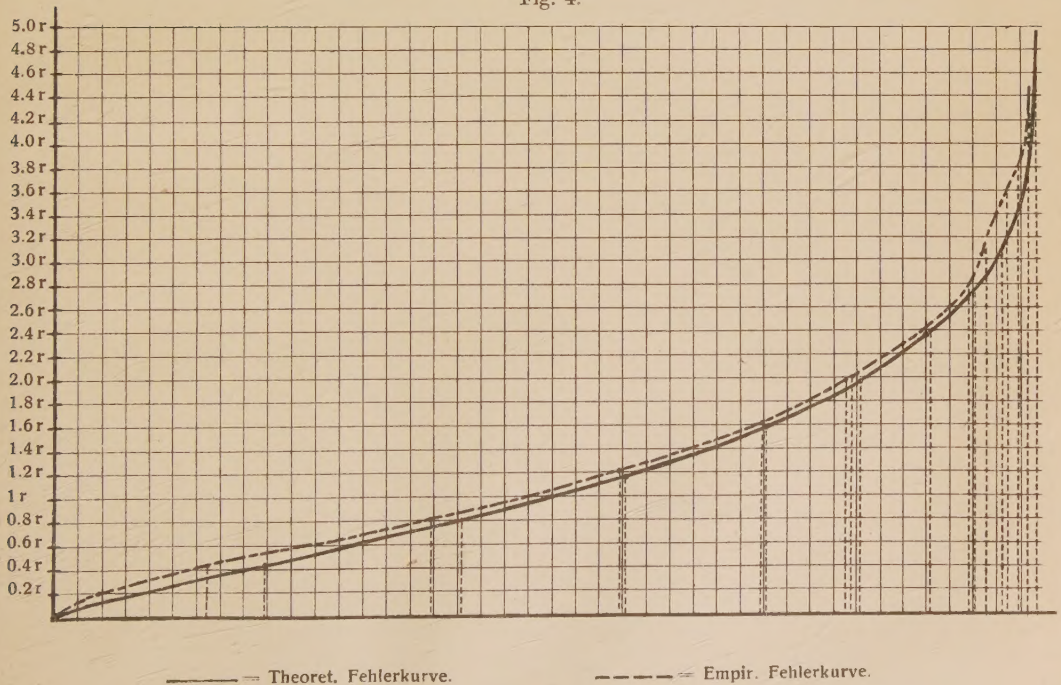

450
400
350
300
250
200
150
100
50
— 5 R
4 R
3 R
2 R
1 R
0
1 R
2 R
3 R
4 R
5 R +
2σ
1σ
0
1σ
2σ
129 97
= 1 i.
= Theoret. Variationskurve.
= 2 i.

Fig. 4.


5.0 r
4.8 r
4.6 r
4.4 r
4.2 r
4.0 r
3.8 r
3.6 r
3.4 r
3.2 r
3.0 r
2.8 r
2.6 r
2.4 r
2.2 r
2.0 r
1.8 r
1.6 r
1.4 r
1.2 r
1 r
0.8 r
0.6 r
0.4 r
0.2 r
= Theoret. Fehlerkurve.
= Empir. Fehlerkurve.